

**Международная серия монографий**  
**“Методы Математического Моделирования”**  
**(МММ)**

- МММ-1** Кузнецов Г.И., Москалюк С.С., Смирнов Ю.Ф., Шелест В.П. *Графическая теория представлений ортогональных и унитарных групп и её физические приложения.*
- МММ-2** Громов Н.А., Москалюк С.С., Смирнов Ю.Ф. *Методы деревьев, контракций и аналитических продолжений в теории представлений классических групп и квантовых алгебр.*
- МММ-3** Москалюк С.С. *Теоретико-групповые методы решения нелинейных дифференциальных уравнений*
- МММ-4** Чап Ф. *Как решать краевые задачи в физике и технике.*
- МММ-5**
- МММ-6** Тирринг В. *Курс математической и теоретической физики.*  
*1. Классические и динамические системы.*
- МММ-7** Тирринг В. *Курс математической и теоретической физики.*  
*2. Классическая теория поля.*
- МММ-8** Тирринг В. *Курс математической и теоретической физики.*  
*3. Квантовая механика атомов и молекул.*
- МММ-9** Тирринг В. *Курс математической и теоретической физики.*  
*4. Квантовая механика больших систем.*
- МММ-10** Коларж И., Михор П.В., Словак Я. *Естественные операции в дифференциальной геометрии.*
- МММ-11** Москалюк С.С. *Категории Кэли-Клейна в топологической квантовой теории поля.*
- МММ-12** Москалюк С.С. *Графическая теория категории представлений и её физические приложения.*

Заказать книги серии МММ можно электронной почтой:  
[mss@bitp.kiev.ua](mailto:mss@bitp.kiev.ua)



Walter E Thinning

**W. Thirring**

**LEHRBUCH DER  
MATHEMATISCHEN  
PHYSIK**

---

**Zweite, neubearbeitete  
Auflage**

---

**Springer-Verlag Wien New York**

**o. Univ.-Prof. Dr. Walter Thirring**

Institut für Theoretische Physik  
Universität Wien, Österreich

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten.

© 1988 by Springer-Verlag/Wien

Printed in Austria

ISBN 3-211-82089-2 Springer-Verlag Wien-New York

ISBN 3-211-81430-2 1. Aufl. Springer-Verlag Wien-New York

ISBN 3-211-82169-4 Springer-Verlag Wien-New York

ISBN 3-211-81475-2 1. Aufl. Springer-Verlag Wien-New York

ISBN 3-211-82535-5 Springer-Verlag Wien-New York

ISBN 3-211-81538-4 1. Aufl. Springer-Verlag Wien-New York

ISBN 3-211-81604-6 Springer-Verlag Wien-New York

Die Russische Übersetzung ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischen oder ähnlichen Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten.

© 2004 Russian translation by the Walter Thirring International Institute for Mathematical Physics, Astrophysics and Nuclear Investigations (TIMPANI),  
624, Kosivska Poliana, Rakhiv District, Transcarpathian,  
UA-90621, Ukraine

Gedruckt in der Ukraine mit Unterstützung des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur in Wien, der Österreichische Akademie der Wissenschaften und der Nationalakademie der Wissenschaften der Ukraine.

ISBN 966-76-49-13-X Series "Methods of Mathematical Modelling" (MMM)

ISBN 966-76-49-32-6 MMM 6-9, TIMPANI-Verlag



Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова  
Национальной академии наук Украины  
Австро-украинский институт  
по науке и технологиям (Австрия)  
Международный институт математической физики,  
астрофизики и ядерных исследований  
им. В. Тирринга (Украина)  
Чешский исследовательский центр (Чехия)  
Братиславский инновационный центр по технологиям,  
реинжинирингу и бизнесу (Словакия)

---

Дифференциально-геометрические и  
операторно-алгебраические методы  
математической физики

---

В. Тирринг

## КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Перевод с немецкого Ю.А. Данилова и С.С. Москалюка

Под редакцией С.С. Москалюка

*Утверждено к печати ученым советом Института  
теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины*

УДК 530.1:51-72

Книга выдающегося австрийского физика В. Тирринга "Курс математической и теоретической физики", выпускаемая на русском языке в серии монографий "Методы математического моделирования" (MMM), знакомит читателя с современным математическим аппаратом и основами математической и теоретической физики.

Настоящая монография представляет собой уникальный труд, отличающийся, во многих отношениях, от известных книг по математической физике. Их авторы обычно ограничивались традиционными методами математической физики. Профессор В. Тирринг приводит новые мощные методы: дифференциально-геометрические и операторно-алгебраические, будучи убежденным в том, что было бы нелепо, если бы будущие физики XXI века изучали математику XIX века.

Безусловно, такое фундаментальное пособие будет исключительно полезным в течение многих лет для широкого круга специалистов в области теоретической и математической физики: преподавателей, аспирантов и студентов физико-математических специальностей, а также научных работников — физиков-теоретиков и математиков.

---

Тирринг В. Курс математической и теоретической физики: Пер. с нем. Ю.А. Данилова и С.С. Москалюка/ Под ред. С.С. Москалюка. — Киев: TIMPANI, 2004. — 1040 с.

ISBN 966-76-49-13-X Серия "Методы Математического Моделирования" (MMM)

ISBN 966-76-49-32-6 MMM 6-9, TIMPANI

---

Книга видатного австрійського фізика В. Тірінга "Курс математичної та теоретичної фізики" видається російською мовою в серії монографій "Методи математичного моделювання" (MMM) і знайомить читача з сучасним математичним апаратом та основами математичної і теоретичної фізики.

Ця монографія є унікальною працею, відмінною, у багатьох випадках, від відомих книг з математичної фізики. Автори цих книг обмежувалися традиційними методами математичної фізики. Професор В. Тірінг подає нові потужні методи: дифференциально-геометричні та операторно-алгебраїчні, переконаний у тому, що є недоцільно, якби майбутні фізики XXI століття вивчали математику лише XIX століття.

Безумовно, такий фундаментальний посібник буде надзвичайно корисним протягом багатьох років для широкого кола фахівців в галузі теоретичної і математичної фізики: викладачів, аспірантів та студентів математичних спеціальностей, а також науковців — фізиків-теоретиків та математиків.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Федерального министерства образования, науки и культуры в Вене, Австрийской академии наук и Национальной академии наук Украины

© 2004, перевод на русский язык, Международный ин-т мат. физики, астрофизики и ядерных исследований им. В. Тирринга (TIMPANI)

Свидетельство о внесении в Государственный реестр субъекта издательской деятельности ДК № 1327 от 15.04.2003 г.

T 1604030000-016  
97

ISBN 966-76-49-13-X Серия "Методы Математического Моделирования" (MMM)

ISBN 966-76-49-32-6 MMM 6-9, TIMPANI

## Предисловие редактора серии

**Задача** создания современных руководств как для студентов, так и для профессиональных научных исследователей является общей для всех областей науки. Однако, математическая и теоретическая физика вследствие своей иерархической структуры состоит в этом отношении из особых преград: более абстрактные разделы теории и математические методы выглядят совершенно бессмысленными до тех пор, пока не освоены предыдущие стадии. Мы надеемся, что предлагаемая вниманию читателя серия книг "Методы Математического Моделирования" (МММ), которая представляет собой попытку объяснить как можно проще внутреннюю сущность научных понятий и математических методов, будет служить ему своеобразной "лестницей" при преодолении преград на пути к интеллектуальным высотам.

Настоящая книга представляет собой уникальный труд, отличающийся во многих отношениях от известных книг по математической и теоретической физике. Их авторы обычно ограничивались традиционными методами изложения, подчеркивая глубокую разницу между монографией и учебником, поскольку монография излагает "как", а учебник объясняет "почему". Однако, с одной стороны, книга Тирринга — это учебник в общепринятом смысле слова. В книге есть упражнения и их решения, имеется много подробных вычислений элементарных примеров. С другой стороны, — это монография, где внимание читателя сконцентрировано на общих концепциях теоретической физики. Профессор В. Тирринг приводит новые мощные методы: дифференциально-геометрические и операторно-алгебраические, будучи убежденным в том, что было бы нелепо, если будущие профессора XXI века изучали бы только математику XIX века. В изложении В. Тирринга теоретическая физика выступает как последовательная теория, описываемая единым математическим аппаратом дифференциально-геометрических и операторно-алгебраических методов, а примеры, иллюстрирующие применение основных принципов физики, подобраны так, что у читателя возникает достаточно ясное представление как о том, что уже стало классическим достоянием физики, так и о том, что получено в теоретической физике в самое последнее время. Прежде всего, следует отметить многоплановость изложения. Строгий математический аппарат, как правило, предваряется основательным качественным рассмотрением общей концепции явления. Далее, на примерах описывается математический метод и затем этот метод применяется к более сложным задачам. Такой подход позволяет читателю усвоить не только математическую, но и чисто физическую сущность рассматриваемых явлений и получаемых результатов.

Книга Тирринга, будучи написана как учебное пособие, призвана служить введением в аппарат современной математической и теоретической физики. Поэтому книга, в первую очередь, предназначена для самостоятельного обучения всех интересующихся современным состоянием математической и теоретической физики независимо от того, студент ли это физический или математический специальности, или профессиональный исследователь. Книга будет полезна студентам-физикам и математикам старших курсов, аспирантам, а также преподавателям университетов и научным сотрудникам всех рангов. И безусловно, такое фундаментальное пособие будет исключительно полезным в течение многих лет для широкого круга специалистов в области теоретической и математической физики.

Автора можно было бы обвинить в том, что за пределами книги остались многие важные вопросы или что-то он рассказал не так, как хотелось бы переводчикам, редактору или данному конкретному читателю. Однако, это вряд ли существенно сказывается на значении книги, так как она превосходно решает основную задачу — кратчайшим путем вывести читателя на уровень математической культуры, необходимый для профессионального понимания современных представлений теоретической физики и успешного применения современных математических методов в физике.

При переводе мы стремились максимально сохранить особенности авторского стиля и вынуждены были ввести некоторые изменения в терминологию, однако мы все же отказались от каких-либо комментариев или дополнений на эту тему.

Если же читатель все-таки не понимает или не верит тому, что написано в этой книге по тому или иному вопросу, пусть не принимает всю вину на себя, а попытается отыскать истину где-нибудь в другом месте. Мы будем очень признательны, если он сообщит результаты своего поиска и свои пожелания по улучшению книги, отправив нам сообщение по адресу: [mss@bitp.kiev.ua](mailto:mss@bitp.kiev.ua).

Книга В. Тирринга также невольно ставит вопрос о месте и значении украинской математики и теоретической физики в рамках мирового творческого процесса. Обсуждение этой темы не может быть проведено в настоящем предисловии, но я надеюсь, что украинский читатель получит богатую пищу для сопоставлений и размышлений.

К сожалению, благодаря “усилиям” Министерства образования и науки Украины, приходится констатировать серьезное отставание нынешнего высшего и, особенно, среднего образования в Украине в области физики и математики.

Сравните учебник В. Тирринга с читаемыми в украинских университетах курсами математической физики и вы увидите, насколько далеко обогнало развитие математики и физики в европейских странах, тот уровень подготовки, которые дают сейчас украинские школы и университеты (тридцать лет тому назад такого разрыва почти не было).

В заключение хочу выразить признательность всем тем, кто сделал возможным появление в свет курса В. Тирринга на русском языке.

Особая моя благодарность Д.В. Ширкову за активную поддержку инициативы перевода курса В. Тирринга на русский язык. Перевод этой книги на русский язык и подготовка её к печати был осуществлён “на грани человеческих возможностей” совместными усилиями Ю.А. Данилова, А.И. Захарченка и редактора.

Я выражаю также сердечную благодарность А. Fössl, W. Kummer, H. Mang, A. Söhn, W. Thirring, A. Vogel, J. Wess, А.Г. Загороднему, Б.Е. Патону, Л.Д. Фадееву и А.П. Шпаку, существенный вклад которых выражается как в активной поддержке, так и в финансовой помощи в течении всего процесса издания этой книги на русском языке.

Я искренне благодарю А.Я. Бельдий, И.М. Бурбана, З.И. Вахненко, О.Б. Заславского, В.И. Ильницького, М.О. Катанаева, Н.М. Трущ, Я.Н. Федышина и В.М. Чиркова за полезные замечания и помощь при редактировании перевода и подготовке оригинал-макета.

И наконец, но не в последнюю очередь, мне приятно также поблагодарить Австрийское федеральное министерство образования, науки и культуры, Австрийскую академию наук и Национальную академию наук Украины (НАНУ) за финансовую поддержку проекта, а также Институт теоретической физики Венского технического университета и Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАНУ за гостеприимство и превосходные условия для работы.

## Предисловие автора к немецкому изданию

В настоящем учебнике математическая физика излагается в хронологической последовательности. Возник учебник из четырехсеместрового курса, который я читал математикам и физикам, прослушавшим только обычные вводные курсы. Чтобы охватить разумный объем более сложного материала и сделать его доступным для студентов старших курсов, необходим был тщательный отбор тем. Я решил включить только такие темы, в которых, отправляясь от фундаментальных физических законов, можно выводить физически значимые результаты со всей математической строгостью. Модели, не опирающиеся на реалистические физические законы, могут, в лучшем случае, служить иллюстрациями математических теорем, а теории, предсказания которых связаны с фундаментальными принципами лишь через некоторую неконтролируемую аппроксимацию, полностью исключаются. Полный курс охватывает следующие односеместровые циклы лекций:

- I. Классические динамические системы.
- II. Классическая теория поля.
- III. Квантовая механика атомов и молекул.
- IV. Квантовая механика больших систем.

К сожалению, некоторые важные разделы физики, например релятивистская квантовая теория, еще не созрели настолько, чтобы от стадии правил для вычислений подняться до уровня математически вполне понятных теорий. Такие разделы в учебнике не затрагиваются. Приведенная выше схема разбиения курса на циклы не подразумевает каких-либо попыток ранжирования по значимости: я стремился только к логической и дидактической непротиворечивости курса.

Общая математическая подготовка читателя предполагается на уровне аспирантов первого года обучения или наиболее сильных студентов старших курсов, специализирующихся в физике или математике. Некоторые термины из того математического фона, на котором развертывается изложение, собраны в кратком словаре, приведенном в начале учебника. Более специальные понятия и термины вводятся по мере необходимости. Используя примеры и контрпримеры, я пытался, с одной стороны, мотивировать выбор каждого понятия, а с другой — показать границы его применимости. Всюду, где только возможно, используются самые свежие и новейшие математические методы, появившиеся на научном рынке. При таком подходе многие из проверенных фаворитов более старого поколения оказались оставленными без внимания, поскольку я считал за лучшее не передавать изрядно надоевшие и изъеденные временем средства математического анализа следующему поколению. Возможно, кому-нибудь удастся экстравагантным использовать многообразия при рассмотрении ньютоновской механики, но, поскольку язык многообразий становится неизбежным при изложении общей теории относительности, я предпочел использовать многообразия с самого начала, чтобы достичь быстрого единообразия при построении курса.

Ссылки на работы, упоминаемые в тексте, приводятся в квадратных скобках [ ], а ссылки на различные части курса даются в круглых скобках (I: ...). Полный перечень их приведен в конце книги каждой части курса. Там же дается и список избранной литературы, хотя полностью подробно библиографию не представляется возможным.

Я весьма признателен М. Брайтенекеру, Ж. Дьедонне, Х. Гроссе, П. Хертслю, Ю. Мозеру, Х. Нарнхофер и Х. Урбантке за ценные предложения. Ф. Вагнер и Р. Бертльман существенно облегчили работу над книгой, оказав неоценимую помощь в перепечатке рукописи, подготовке к набору и в художественном оформлении книги.

*Вальтер Тирринг*

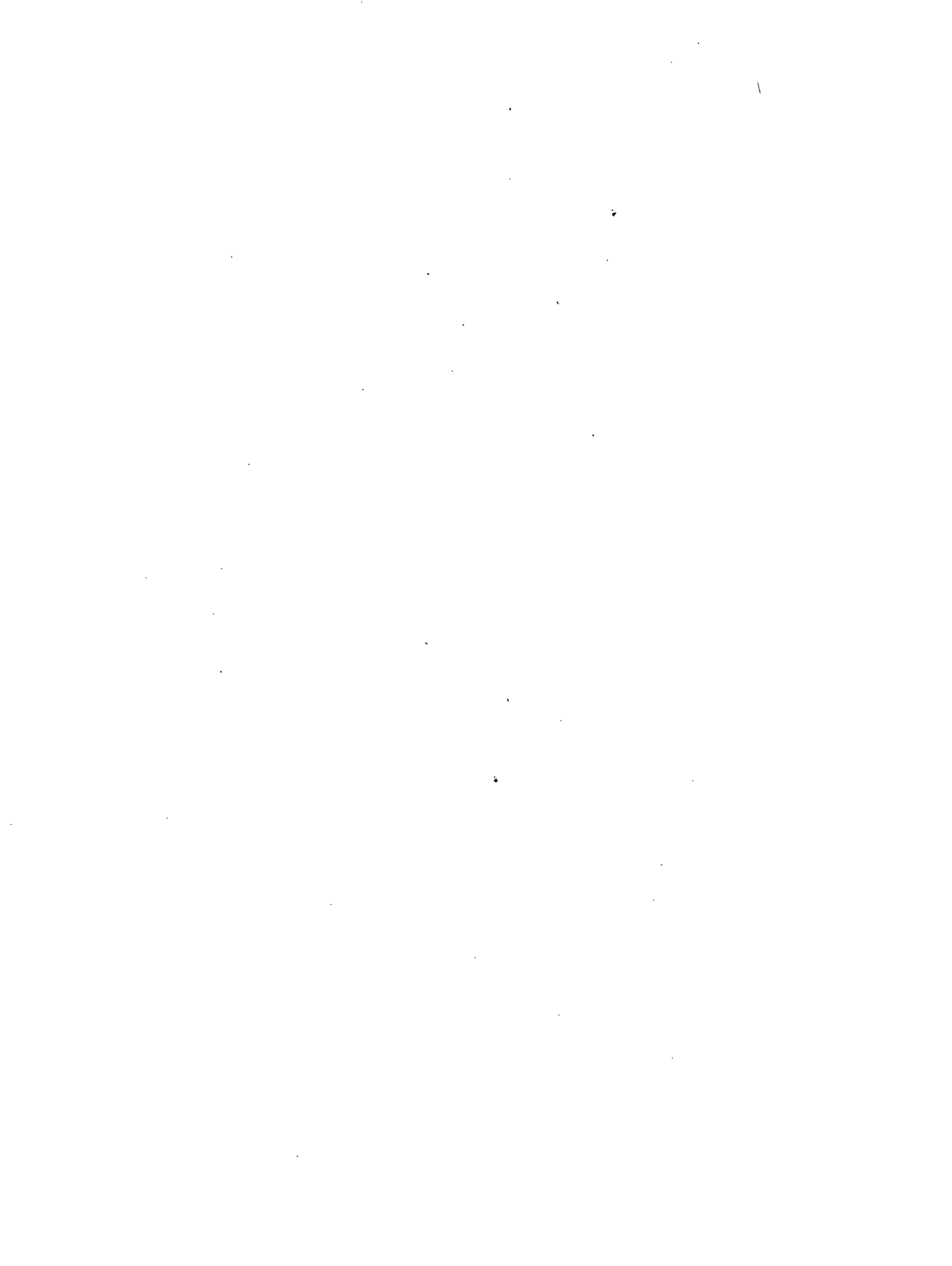
# Оглавление

|  |               |
|--|---------------|
| <i>Предисловие редактора серии</i> . . . . .                                       | I: 7          |
| <i>Предисловие автора к немецкому изданию</i> . . . . .                            | I: 9          |
| <i>Краткий словарь</i> . . . . .   | I: 15         |
| <i>Оборачения, смысл которых объясняется в тексте</i> . . . . .                    | I: 18         |
| <b>Часть I. Классические динамические системы</b> . . . . .                        | <b>I: 23</b>  |
| <i>Предисловие ко второму немецкому изданию</i> . . . . .                          | I: 24         |
| <b>1. Введение</b> . . . . .   | <b>I: 25</b>  |
| 1.1. Уравнения движения . . . . .  | I: 25         |
| 1.2. Математический язык . . . . .   | I: 27         |
| 1.3. Физическая интерпретация . . . . .  | I: 28         |
| <b>2. Анализ на многообразиях</b> . . . . .  | <b>I: 31</b>  |
| 2.1. Многообразия . . . . .  | I: 31         |
| 2.2. Касательное пространство . . . . .  | I: 42         |
| 2.3. Потoki . . . . .  | I: 53         |
| 2.4. Тензоры . . . . .   | I: 61         |
| 2.5. Производные . . . . .   | I: 78         |
| 2.6. Интегрирование . . . . .  | I: 89         |
| <b>3. Гамильтоновы системы</b> . . . . .   | <b>I: 99</b>  |
| 3.1. Канонические преобразования . . . . .   | I: 99         |
| 3.2. Уравнения Гамильтона . . . . .  | I: 105        |
| 3.3. Постоянные движения . . . . .   | I: 113        |
| 3.4. Предел $t \rightarrow \pm\infty$ . . . . .                                    | I: 128        |
| 3.5. Теория возмущений — первый шаг . . . . .                                      | I: 149        |
| 3.6. Итерация разложения в ряд теории возмущений . . . . .                         | I: 159        |
| <b>4. Нерелятивистское движение</b> . . . . .                                      | <b>I: 169</b> |
| 4.1. Свободные частицы . . . . .   | I: 169        |
| 4.2. Задача двух тел . . . . .   | I: 172        |
| 4.3. Задача о притяжении двумя неподвижными центрами . . . . .                     | I: 179        |
| 4.4. Ограниченная задача трех тел . . . . .  | I: 186        |
| 4.5. Задача $N$ тел . . . . .  | I: 199        |
| <b>5. Релятивистское движение</b> . . . . .  | <b>I: 207</b> |
| 5.1. Гамильтонова формулировка<br>электродинамических уравнений движения . . . . . | I: 207        |
| 5.2. Постоянное поле . . . . .   | I: 212        |
| 5.3. Кулоновское поле . . . . .  | I: 217        |
| 5.4. Бетатрон . . . . .  | I: 223        |
| 5.5. Движение в поле плоского импульса . . . . .                                   | I: 226        |
| 5.6. Релятивистское движение в гравитационном поле . . . . .                       | I: 231        |
| 5.7. Движение в поле Шварцшильда . . . . .   | I: 236        |
| 5.8. Движение в плоских гравитационных волнах . . . . .                            | I: 244        |

|   |  |               |
|---|--|---------------|
| 6.  | Структура пространства и времени . . . . .                           | I: 249        |
| 6.1.  | Однородная Вселенная . . . . .                                       | I: 249        |
| 6.2.  | Изотропная Вселенная . . . . .                                       | I: 250        |
| 6.3.  | $M_e$ по Галилею . . . . .   | I: 252        |
| 6.4.  | $M_e$ как пространство Минковского . . . . .                         | I: 253        |
| 6.5.  | $M_e$ как псевдориманово пространство . . . . .                      | I: 259        |
|   | <i>Литература</i> . . . . .  | I: 262        |
| <b>Часть II. Классическая теория поля . . . . .</b>             |  | <b>II: 1</b>  |
|   | <i>Предисловие к первому немецкому изданию</i> . . . . .             | II: 3         |
|   | <i>Предисловие ко второму немецкому изданию</i> . . . . .            | II: 4         |
| 1.  | Введение . . . . .   | II: 5         |
| 1.1.  | Физические явления динамики поля . . . . .                           | II: 5         |
| 1.2.  | Математический формализм . . . . .                                   | II: 13        |
| 1.3.  | Уравнения Максвелла и Эйнштейна . . . . .                            | II: 29        |
| 2.  | Электромагнитное поле заданных распределений заряда . . . . .        | II: 43        |
| 2.1.  | Принцип стационарного действия и законы сохранения . . . . .         | II: 43        |
| 2.2.  | Общее решение . . . . .  | II: 53        |
| 2.3.  | Поле точечного заряда . . . . .                                      | II: 64        |
| 2.4.  | Реакция излучения . . . . .  | II: 81        |
| 3.  | Поле в присутствии проводников . . . . .                             | II: 91        |
| 3.1.  | Сверхпроводник . . . . .   | II: 91        |
| 3.2.  | Полупространство, волновод и резонатор . . . . .                     | II: 99        |
| 3.3.  | Дифракция на клине . . . . .   | II: 110       |
| 3.4.  | Дифракция на цилиндре . . . . .                                      | II: 121       |
| 4.  | Гравитация . . . . .   | II: 135       |
| 4.1.  | Ковариантная производная и кривизна . . . . .                        | II: 135       |
| 4.2.  | Калибровочные теории и гравитация . . . . .                          | II: 152       |
| 4.3.  | Максимально симметричные пространства . . . . .                      | II: 167       |
| 4.4.  | Пространства с максимально симметричными подмногообразиями . . . . . | II: 178       |
| 4.5.  | Жизнь и смерть звезд . . . . .                                       | II: 193       |
| 4.6.  | Существование особенностей . . . . .                                 | II: 204       |
|   | <i>Литература</i> . . . . .  | II: 219       |
| <b>Часть III. Квантовая механика атомов и молекул . . . . .</b> |  | <b>III: 1</b> |
|   | <i>Предисловие к первому немецкому изданию</i> . . . . .             | III: 3        |
|   | <i>Предисловие ко второму немецкому изданию</i> . . . . .            | III: 4        |
| 1   | Введение . . . . .   | III: 5        |
| 1.1   | Структура квантовой теории . . . . .                                 | III: 5        |
| 1.2   | Порядки величин атомных систем . . . . .                             | III: 6        |
| 2   | Математическая формулировка квантовой механики . . . . .             | III: 11       |
| 2.1   | Линейные пространства . . . . .                                      | III: 11       |
| 2.2   | Алгебры . . . . .  | III: 23       |
| 2.3   | Представления в гильбертовом пространстве . . . . .                  | III: 38       |
| 2.4   | Однопараметрические группы . . . . .                                 | III: 52       |
| 2.5   | Неограниченные операторы и квадратичные формы . . . . .              | III: 64       |



|  |  |          |
|--|--|----------|
| <b>3</b>   | Квантовая динамика . . . . .                             | III: 79  |
| 3.1  | Система Вейля . . . . .                                  | III: 79  |
| 3.2  | Угловой момент . . . . .                                 | III: 89  |
| 3.3  | Эволюция во времени . . . . .                            | III: 97  |
| 3.4  | Предел $t \rightarrow \pm\infty$ . . . . .               | III: 115 |
| 3.5  | Теория возмущений . . . . .                              | III: 133 |
| 3.6  | Стационарная теория рассеяния . . . . .                  | III: 153 |
| <b>4</b>   | Атомные системы . . . . .                                | III: 175 |
| 4.1  | Атом водорода . . . . .                                  | III: 175 |
| 4.2  | Атом водорода во внешних полях . . . . .                 | III: 189 |
| 4.3  | Гелиевоподобные атомы . . . . .                          | III: 199 |
| 4.4  | Рассеяние на простом атоме . . . . .                     | III: 226 |
| 4.5  | Сложные атомы . . . . .                                  | III: 239 |
| 4.6  | Движение ядра и простые молекулы . . . . .               | III: 250 |
|  | <b>Литература</b> . . . . .                              | III: 262 |
| <b>Часть IV. Квантовая механика больших систем</b> . . . . . |  | IV: 1    |
|  | <i>Предисловие к первому немецкому изданию</i> . . . . . | IV: 3    |
| <b>1</b>   | Системы со многими частицами . . . . .                   | IV: 5    |
| 1.1  | Равновесие и неравновесность . . . . .                   | IV: 5    |
| 1.2  | Предел бесконечно большого числа частиц . . . . .        | IV: 14   |
| 1.3  | Произвольное число частиц в пространстве Фока . . . . .  | IV: 22   |
| 1.4  | Представления с $N = \infty$ . . . . .                   | IV: 30   |
| <b>2</b>   | Термостатика . . . . .                                   | IV: 43   |
| 2.1  | Упорядочение состояний . . . . .                         | IV: 43   |
| 2.2  | Свойства энтропии . . . . .                              | IV: 53   |
| 2.3  | Микроканонический ансамбль . . . . .                     | IV: 65   |
| 2.4  | Канонический ансамбль . . . . .                          | IV: 91   |
| 2.5  | Большой канонический ансамбль . . . . .                  | IV: 103  |
| <b>3</b>   | <b>Термодинамика</b> . . . . .                           | IV: 125  |
| 3.1  | Эволюция во времени . . . . .                            | IV: 125  |
| 3.2  | Равновесное состояние . . . . .                          | IV: 152  |
| 3.3  | Стабильность и пассивность . . . . .                     | IV: 169  |
| 3.4  | Квантовая эргодическая теория . . . . .                  | IV: 184  |
| <b>4</b>   | <b>Физические системы</b> . . . . .                      | IV: 197  |
| 4.1  | Теория Томаса-Ферми . . . . .                            | IV: 197  |
| 4.2  | Космические тела . . . . .                               | IV: 225  |
| 4.3  | Нормальное вещество . . . . .                            | IV: 237  |
|  | <b>Литература</b> . . . . .                              | IV: 256  |
|  | <b>Алфавитный указатель</b> . . . . .                    | 1027     |



## Краткий словарь

### Общие обозначения

$\forall$  — для всех, для каждого, для любого;  $\exists$  — существует;  $\exists!$  — существует ровно один;  $\Rightarrow$  — логическая импликация;  $f :=$  — по определению  $f$  равно.

**Множества** (обозначаются прописными буквами или указанием элементов (строчные буквы) в фигурных скобках  $\{ \}$ ):

$a \in A$  —  $a$  есть элемент множества  $A$ ;  $a \notin A$  —  $a$  не принадлежит множеству  $A$ .

$A \cup B$  — объединение множеств  $A$  и  $B$ ;  $A \cap B$  — пересечение множеств  $A$  и  $B$ .

$A \subset B$  —  $A$  есть подмножество множества  $B$ ;  $B$  содержит (включает в себя) множество  $A$ .

$CA$  — дополнение множества  $A$  (относительно содержащего  $A$  множества  $B$ :  $CA = \{a : a \in B, a \notin A\}$ ).

$A \setminus B$ :  $\{a : a \in A, a \notin B\}$ .

$A \Delta B$ :  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  — симметричная разность множеств  $A$  и  $B$ .

$\emptyset$  — пустое множество,  $C\emptyset$  — полное множество.

$A \times B$  — прямое, или декартово, произведение множеств  $A$  и  $B$ : множество пар  $(a, b)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ .

### Важные семейства подмножеств

**Открытые множества** — содержат  $\emptyset$ , полное множество и объединение произвольного числа и пересечение конечного числа открытых множеств.

**Замкнутые множества** — дополнения открытых множеств.

**Измеримые множества** — содержат  $\emptyset$ , дополнения измеримых множеств и пересечение счетного числа измеримых множеств.

**Множества, измеримые по Борелю**, — наименьшее семейство измеримых множеств, содержащее открытые множества.

**Нулевые множества** — множества меры нуль (почти всюду = с точностью до множества меры нуль).

**Отношение эквивалентности** — покрытие непересекающимися подмножествами;  $a \sim b$  означает, что  $\exists z$  принадлежат одному подмножеству, причем а)  $a \sim a$ ; б)  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ ; в)  $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ .

### Числа

$\mathbb{N}$  — натуральные числа.

$\mathbb{Z}$  — целые числа.

$\mathbb{R}^+$  — положительные (отрицательные) числа.

$\mathbb{C}$  — комплексные числа  $\exists z = x + iy, z^* = x - iy, x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z, |z|^2 = x^2 + y^2$ .

$\sup$  — супремум (точная верхняя грань),  $\inf$  — инфимум (точная нижняя грань).

$(a, b)$  — открытый интервал.

$[a, b]$  — замкнутый интервал.

$[a, b)$  — полуоткрытый интервал.

$\mathbb{E} \times \mathbb{E}$  — векторное пространство со скалярным произведением:

$$(y_1, \dots, y_n | x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n y_i x_i.$$

**Функция** (= функции),  $f : A \rightarrow B$ , каждому  $a \in A$  ставит в соответствие  $f(a) \in B$ .

**Образ** множества  $A = \{f(a) \in B, a \in A\}$ .

**Прообраз** элемента  $b : \{a \in A : f(a) = b\}$ .

$f^{-1}$  — обратное отображение. (Примечания: (i)  $f^{-1}$  может не существовать; (ii) при  $B = \mathbb{R}$  обратное отображение  $f^{-1}$  не следует смешивать с  $1/f$ ).

$f^{-1}(B)$  — прообраз множества  $B$ ;  $B = \bigcup_b f^{-1}(b)$ .

Инъективное отображение —  $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ .

Сюръективное отображение —  $f(A) = B$ .

Биективное отображение — отображение, одновременно инъективное и сюръективное; только в этом случае отображение  $f^{-1}$  существует.

$f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \rightarrow B_1 \times B_2$  — прямое, или декартово, произведение отображений:

$$(a_1, a_2) \rightarrow (f(a_1), f(a_2)).$$

$f_1 : A \rightarrow B, f_2 : B \rightarrow C, f_2 \circ f_1 : A \rightarrow C$  — композиция отображений  $f_1$  и  $f_2$ :  $a \rightarrow f_2(f_1(a))$ .

$1$  — тождественное отображение в случае  $A = B : a \rightarrow a$ . (Примечание:  $1$  не следует путать с отображением  $a \rightarrow 1$  при  $B = \mathbb{R}$ .)

$f|_U$  — ограничение отображения  $f$  на подмножество  $U \subset A$ .

$f|_a = f(a)$  — отображение в точке  $a$ .

$f \circ g$  — композиция отображений  $f$  и  $g$ :  $f \circ g(a) = f(g(a))$ .

Непрерывное отображение — прообраз открытого множества открыт.

Измеримое отображение — прообраз измеримого множества измерим.

Носитель отображения — наименьшее замкнутое множество, на котором  $f \neq 0$ .

$C^r$  — множество  $r$ -кратно непрерывно дифференцируемых функций.

$C_0^r$  — множество функций из  $C^r$  с компактным носителем.

$\chi_A$  — характеристическая функция множества  $A$ :  $\chi_A(a) = 1$ , если  $a \in A$ , и  $\chi_A(a) = 0$ , если  $a \notin A$ .

### Топологические понятия

Топология — определяется заданием открытых подмножеств множества  $A$ .

Компактность — множество компактно, если из каждого покрытия его открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Связность — множество связно, если не содержит собственного подмножества, которое является одновременно открытым и замкнутым.

Дискретная топология — топология, в которой любое подмножество открыто.

Тривиальная топология — топология, в которой открыты только пустое множество  $\emptyset$  и его дополнение  $C\emptyset$ .

Односвязность — множество односвязно, если любой замкнутый путь (контур) на нем может быть стянут в точку.

Окрестность точки  $a \in A$  — открытое множество, содержащее точку  $a$  (в большинстве случаев обозначается  $U$  или  $V$ ).

Окрестность множества  $B \subset A$  — открытое множество, содержащее множество  $B$ .

Предельная точка (точка накопления)  $p$  множества  $B$  — точка  $p$ , в каждой окрестности  $U \ni p$  которой содержится по крайней мере одна точка  $b \in U \cap B : b \neq p$ .

$\bar{B}$  — замыкание множества  $B$  — наименьшее замкнутое множество  $\supset B$ .

Множество  $B$  (всюду) плотно в  $A$ , если  $\bar{B} = A$ ; множество  $B$  нигде не плотно в  $A$ , если множество  $A \setminus \bar{B}$  плотно.

Метрическое пространство — множество  $A$ , на котором существует окрестность точки  $a = \{b : d(a, b) < \eta\}$  при  $\eta \in \mathbb{R}^+$  и задана метрика (отображение)  $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ , такая, что

(i)  $d(a, a) = 0$ ;

(ii)  $d(a, b) = d(b, a) > 0$  при  $a \neq b$ ;

(iii)  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ .

Сепарабельное пространство — топологическое пространство, содержащее счетное всюду плотное подмножество.

Гомеоморфизм — непрерывное биективное отображение  $f$ , для которого обратное отображение  $f^{-1}$  непрерывно.

Произведение топологий на  $A_1 \times A_2$  — топология, в которой открытыми являются множества  $U_1 \times U_2$ ,  $A_i \supset U_i$  и их объединения.

## Математические обозначения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} q(t).$$

$\det |M_{ij}|$  — определитель матрицы  $M_{ij}$ .

$\delta_{ij} = 1$ , если  $i = j$ , и 0, если  $i \neq j$ .

$\varepsilon_{i_1 \dots i_m}$  — полностью антисимметричный тензор  $m$ -го ранга, принимающий значения  $\pm 1$ .

$\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  — вещественные матрицы размерности  $(n \times n)$ .

$M^t$  — транспонированная матрица:  $(M^t)_{ij} = M_{ji}$ .

$M^*$  — эрмитово сопряженная матрица:  $(M^*)_{ij} = M_{ji}^*$ .

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} | \mathbf{w})$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ .

$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$  — векторное произведение.

$\text{grad } f$  — градиент.

$\text{rot } f$  — ротор.

$\text{div } f$  — дивергенция.

Соглашение о суммировании — по повторяющимся индексам (если это не приводит к недоразумению)

предполагается суммирование, например,  $L_{ik}x_k = \sum_k L_{ik}x_k$ .

$|\mathbf{v}|$  — длина вектора  $\mathbf{v}$ , равная  $(\sum_i v_i^2)^{1/2} = d(\mathbf{0}, \mathbf{v})$ .

$\mathbf{ds}$  — линейный элемент.

$\mathbf{d}\mathcal{O}$  — элемент поверхности.

$\mathbf{d}^m q$  —  $m$ -мерный элемент объема.

$\perp$  — ортогонально.

$\parallel$  — параллельно.

$\angle$  — угол.

$\mathcal{O}(x)$  — порядка  $x$ .

## Группы

$\text{GL}_n$  — группа матриц  $M$  размерности  $(n \times n)$  с  $\det M \neq 0$ .

$\text{GL}_n^+$  — группа матриц  $M$  размерности  $(n \times n)$  с  $MM^t = 1$ .

$\text{SO}_n$  —  $M \in \text{O}_n$ ,  $\det M = 1$ .

$\text{E}_n$  — евклидова группа.

$\text{P}_n$  — группа перестановок  $n$  элементов.

$\text{U}_n$  — группа комплексных матриц  $M$  размерности  $(n \times n)$  с  $MM^* = 1$ .

$\text{Sp}_n$  — группа симплектических матриц размерности  $(n \times n)$ .

## Физические обозначения

$m$  — масса  $i$ -й частицы.

$\mathbf{r}_i$  — декартовы координаты  $i$ -й частицы.

$t = \frac{r^0}{c}$  — время.

$\tau$  — собственное время.

$\mathbf{q}$  — обобщенные координаты.

$\mathbf{p}$  — обобщенные импульсы.

$q_i$  — электрический заряд  $i$ -й частицы.

$g$  — гравитационная постоянная.

$c$  — скорость света.

$\hbar$  — квант действия.

$\mathbf{F}_i$  — тензор напряженности электромагнитного поля.

$\Phi$  — гравитационный потенциал.

$\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля.

$\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля (в вакууме).

$\sim$  — порядка.

$\gg$  — много больше.

## Обозначения, смысл которых объясняется в тексте

|                      |  |                       |
|----------------------|--|-----------------------|
| $Df$                 | — производная отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ..... | (I:2.1.1)             |
| $(V, \Phi)$          | — карта .....  | (I:2.1.3)             |
| $T^n$                | — $n$ -мерный тор .....  | (I:2.1.7,2)           |
| $S^n$                | — $n$ -мерная сфера .....  | (I:2.1.7,2)           |
| $\partial M$         | — край многообразия $M$ .....  | (I:2.1.20)            |
| $\Theta_C(q)$        | — отображение касательного пространства в $\mathbb{R}^m$ .....             | (I:2.2.1)             |
| $T_q(M)$             | — касательное пространство к многообразию $M$ в точке $q$ .....            | (I:2.2.4)             |
| $T_q(f)$             | — дифференциал отображения $f$ в точке $q$ .....                           | (I:2.2.7)             |
| $T(M)$               | — касательное расслоение над $M$ .....                                     | (I:2.2.12)            |
| $\Pi$                | — проекция на базу .....   | (I:2.2.15)            |
| $T(f)$               | — производная отображения $f: M_1 \rightarrow M_2$ .....                   | (I:2.2.17)            |
| $\mathcal{T}_0^1(M)$ | — векторное поле .....   | (I:2.2.19)            |
| $\Phi_*$             | — отображение, индуцированное в $\mathcal{T}_s^r$ .....                    | (I:2.2.21)            |
| $L_X$                | — производная Ли .....   | (I:2.2.24), (I:2.5.7) |
| $\partial_i$         | — естественный базис .....   | (I:2.2.26)            |
| $\Phi_t^X$           | — поток .....  | (I:2.3.7)             |
| $\tau_t^X$           | — автоморфизм потока .....   | (I:2.3.8)             |
| $W$                  | — функция действия .....   | (I:2.3.16)            |
| $\mathcal{L}$        | — функция Лагранжа, лагранжиан .....                                       | (I:2.3.17)            |
| $H$                  | — функция Гамильтона, гамильтониан .....                                   | (I:2.3.22)            |
| $T_q^*(M)$           | — кокасательное пространство .....   | (I:2.4.1)             |
| $e_i^*$              | — дуальный (сопряженный) базис .....                                       | (I:2.4.2,1)           |
| $df$                 | — внешняя производная функции $f$ .....                                    | (I:2.4.3,1)           |
| $T_{q,s}^r(M)$       | — пространство тензоров .....  | (I:2.4.4)             |
| $\otimes$            | — тензорное произведение .....   | (I:2.4.5)             |
| $\wedge$             | — внешнее произведение .....   | (I:2.4.7)             |
| $i_X$                | — внутреннее произведение .....  | (I:2.4.9)             |
| $*$                  | — *-отображение .....  | (I:2.4.18)            |
| $T_s^r(M)$           | — тензорное расслоение .....   | (I:2.4.25)            |
| $\mathcal{T}_s^r(M)$ | — тензорное поле .....   | (I:2.4.28)            |
| $E_p(M)$             | — $p$ -формы .....   | (I:2.4.28)            |
| $g$                  | — риманова метрика .....   | (I:2.4.31)            |
| $\times$             | — расслоенное произведение .....   | (I:2.4.33)            |
| $T^*(\Phi)$          | — транспонированная производная .....                                      | (I:2.4.34)            |
| $\Phi^*$             | — прообраз ковариантных тензорных полей .....                              | (I:2.4.41)            |
| $d$                  | — внешняя производная .....  | (I:2.5.1)             |
| $[, ]$               | — скобки Ли .....  | (I:2.5.9,6)           |
| $\Theta, \omega$     | — канонические формы на $T^*(M)$ .....                                     | (I:3.1.1)             |
| $\Omega$             | — мера Лиувилля .....  | (I:3.1.2,3)           |
| $X_H$                | — гамильтоново векторное поле .....  | (I:3.1.9)             |
| $b$                  | — биективное отображение, ассоциированное с $\omega$ .....                 | (I:3.1.9)             |
| $\{, \}$             | — скобки Пуассона .....  | (I:3.1.11)            |
| $M_e$                | — расширенное конфигурационное пространство .....                          | (I:3.2.12)            |
| $\mathcal{H}$        | — функция Гамильтона в $M_e$ .....   | (I:3.2.12)            |
| $(I, \varphi)$       | — переменные действие-угол .....   | (I:3.3.14)            |

|                                 |   |               |
|---------------------------------|---|---------------|
| $\Omega_{\pm}$                  | — преобразование Мёллера                        | (I:3.4.4)     |
| $S$                             | — матрица рассеяния, $S$ -матрица               | (I:3.4.9)     |
| $d\sigma$                       | — дифференциальное сечение рассеяния            | (I:3.4.15)    |
| $L$                             | — угловой момент                                | (I:4.1.3)     |
| $K$                             | — буст  | (I:4.1.9)     |
| $\eta_{\alpha\beta}$            | — метрика пространства Минковского              | (I:5.1.2)     |
| $\gamma$                        | — величина $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$                 | (I:5.1.4,2)   |
| $F$                             | — электромагнитная 2-форма                      | (I:5.1.10,1)  |
| $A$                             | — 1-форма потенциала                            | (I:5.1.10,1)  |
| $\Lambda$                       | — преобразование Лоренца                        | (I:5.1.12)    |
| $r_0$                           | — радиус Шварцшильда                            | (I:5.7.1)     |
| $e^{i_1 i_2 \dots i_p}$         | — базис $p$ -форм                               | (II:1.2.3)    |
| $E_p(M)$                        | — линейное пространство $p$ -форм               | (II:1.2.5,2)  |
| $d$                             | — внешний дифференциал                          | (II:1.2.6)    |
| $\omega _N$                     | — ограничение формы $\omega$                    | (II:1.2.7,3)  |
| $E_m^0(U)$                      | — пространство $m$ -форм с компактным носителем | (II:1.2.9)    |
| $\langle e^i(x) e^k(x) \rangle$ | — скалярное произведение                        | (II:1.2.14)   |
| $i_v$                           | — внутреннее произведение                       | (II:1.2.16)   |
| $*$                             | — изоморфизм между $E_p$ и $E_{m-p}$            | (II:1.2.17)   |
| $\delta$                        | — кодифференциал                                | (II:1.2.19)   |
| $\Delta$                        | — оператор Лапласа-Бельтрами                    | (II:1.2.20)   |
| $L_v$                           | — производная Ли                                | (II:1.2.23)   |
| $\omega^i_k$                    | — форма переноса                                | (II:1.2.25)   |
| $\omega_{ik}$                   | — форма переноса                                | (II:1.2.25)   |
| $\Theta(x)$                     | — ступенчатая функция Хевисайда                 | (II:1.2.31)   |
| $\delta(x)$                     | — $\delta$ -функция Дирака                      | (II:1.2.31)   |
| $\delta_{\bar{x}}$              | — $\delta$ -функция Дирака (форма)              | (II:1.2.33)   |
| $G_{\bar{x}}$                   | — функция Грина                                 | (II:1.2.35)   |
| $E, B, F$                       | — электрическое и магнитное поле                | (II:1.3.1)    |
| $A$                             | — вектор-потенциал                              | (II:1.3.7)    |
| $\Lambda$                       | — калибровочная функция                         | (II:1.3.10,1) |
| $J$                             | — ток   | (II:1.3.12)   |
| $Q$                             | — полный заряд                                  | (II:1.3.18,2) |
| $T^{\alpha\beta}$               | — тензор энергии-импульса                       | (II:1.3.20)   |
| $P^{\alpha}$                    | — полная энергия-импульс                        | (II:1.3.21)   |
| $T^{\alpha}$                    | — форма энергии-импульса поля                   | (II:1.3.22)   |
| $z(s)$                          | — мировая линия точечной частицы                | (II:1.3.25,2) |
| $t^{\alpha}$                    | — форма энергии-импульса вещества               | (II:1.3.25,2) |
| $\mathcal{L}$                   | — электромагнитная функция Лагранжа             | (II:2.1.1)    |
| $W$                             | — действие в теории поля                        | (II:2.1.1)    |
| $S$                             | — вектор Пойнтинга                              | (II:2.1.13)   |
| $D^{\pm}(N)$                    | — будущая (прошлая) область зависимости         | (II:2.1.15)   |
| $D_{\bar{x}}$                   | — функция Грина в пространстве Минковского      | (II:2.2.5)    |
| $D^{ret}(x)$                    | — запаздывающая функция Грина                   | (II:2.2.7)    |
| $G_{\bar{x}}^{ret}$             | — запаздывающая функция Грина (форма)           | (II:2.2.7)    |
| $F^{ret}$                       | — запаздывающее поле                            | (II:2.2.9)    |
| $F^{retn}$                      | — падающее поле                                 | (II:2.2.15)   |
| $F^{aus}$                       | — уходящее поле                                 | (II:2.2.15)   |
| $F^{rad}$                       | — поле излучения                                | (II:2.2.21)   |
| $D(x)$                          | — $D$ -функция                                  | (II:2.2.22)   |
| $\delta E$                      | — потеря энергии за один оборот                 | (II:2.4.4,2)  |
| $\varepsilon(k)$                | — диэлектрическая постоянная                    | (II:3.1.19,3) |
| $\chi(k)$                       | — магнитная восприимчивость                     | (II:3.1.19,3) |
| $S$                             | — “суперпотенциал”                              | (II:3.1.20)   |

|  |   |                  |
|--|---|------------------|
| $F(z)$   | — интеграл Френеля  | (II:3.3.10)      |
| $S_p$  | — сечения со значениями в $p$ -формах                           | (II:4.1.9)       |
| $D$  | — ковариантная внешняя производная                              | (II:4.1.10)      |
| $\mathcal{L}_u$                                      | — ковариантная производная Ли                                   | (II:4.1.15)      |
| $D_u$  | — ковариантная производная (сечение при $p = 0$ )               | (II:4.1.15)      |
| $\Omega$   | — форма кривизны  | (II:4.1.19)      |
| $\theta$   | — склеенная форма   | (II:4.1.32)      |
| $T$  | — кручение  | (II:4.1.32)      |
| $\Gamma_{ijk}$                                       | — символ Кристоффеля  | (II:4.1.36)      |
| $R_{ik}$   | — формы кривизны  | (II:4.1.43)      |
| $R_{ijklm}$  | — тензор Римана-Кристоффеля                                     | (II:4.1.44,2)    |
| $R$  | — скалярная кривизна  | (II:4.1.44,3)    |
| $C_{jk}$   | — формы Вейля   | (II:4.1.44,3)    |
| $K$  | — параметр кривизны изотропных пространств                      | (II:4.3.6)       |
| $r_0$  | — радиус Шварцшильда  | (II:4.4.41)      |
| $c$  | — степень схождения   | (II:4.6.8)       |
| $J^+(x)$   | — будущее   | (II:4.6.18(i))   |
| $J^-(x)$   | — прошлое   | (II:4.6.18(i))   |
| $C(x, S)$  | — множество причинных кривых                                    | (II:4.6.18(ii))  |
| $C^1(x, S)$  | — множество дифференцируемых причинных кривых                   | (II:4.6.18(ii))  |
| $d(\lambda)$   | — длина кривой $\lambda$  | (II:4.6.18(iii)) |
| $p, q$   | — координаты импульса и положения                               | (III:1.1)        |
| $\psi$   | — $\psi$ -функция Шредингера                                    | (III:1.1)        |
| $\hbar$  | — квант действия Планка   | (III:1.2)        |
| $L$  | — орбитальный угловой момент                                    | (III:1.2.1)      |
| $l$  | — квантовое число углового момента                              | (III:1.2.2)      |
| $Z$  | — заряд ядра  | (III:1.2.2)      |
| $r_b$  | — радиус Бора   | (III:1.2.3)      |
| $R_y$  | — постоянная Ридберга   | (III:1.2.4)      |
| $E$  | — векторное пространство  | (III:2.1.1)      |
| $\  \cdot \ $  | — норма   | (III:2.1.4)      |
| $\  \cdot \ _p$                                      | — $p$ -норма  | (III:2.1.5,6)    |
| $L^p(\mathbb{K}, \mu)$                               | — пространство с мерой  | (III:2.1.5,6)    |
| $\ell^p$   | — пространство последовательностей                              | (III:2.1.6,2)    |
| $\langle   \rangle$                                  | — скалярное произведение  | (III:2.1.7)      |
| $\oplus$   | — гильбертова сумма   | (III:2.1.9,2)    |
| $e_\gamma$   | — базисный вектор   | (III:2.1.12,3)   |
| $E'$   | — дуальное пространство   | (III:2.1.16)     |
| $\mathcal{L}(E, F)$                                  | — пространство непрерывных линейных отображений                 | (III:2.1.24)     |
| $\mathcal{B}(E)$                                     | — пространство ограниченных операторов                          | (III:2.1.4)      |
| $a^*$  | — сопряженный оператор  | (III:2.1.26,3)   |
| $w\text{-lim}$                                       | — слабый предел   | (III:2.1.27)     |
| $s\text{-lim}$                                       | — сильный предел  | (III:2.1.27)     |
| $\lim$   | — предел по норме   | (III:2.1.27)     |
| $\mathcal{A}$  | — алгебра   | (III:2.2.1)      |
| $\text{Sp}(a)$                                       | — спектр оператора $a$  | (III:2.2.13)     |
| $a \geq b$   | — частичное упорядочение операторов                             | (III:2.2.16)     |
| $X(\mathcal{A})$                                     | — множество характеров  | (III:2.2.25)     |
| $(\Delta_w(a))^2 =$<br>$= (\Delta a)^2 = \Delta a^2$ | — квадрат флуктуации  | (III:2.2.33,4)   |
| $\mathcal{P}$  | — совокупность высказываний                                     | (III:2.2.35)     |
| $p_1 \wedge p_2$                                     | — дизъюнкция (теоретико-множественное пересечение) высказываний | (III:2.2.35,i)   |
| $p_1 \vee p_2$                                       | — конъюнкция (теоретико-множественное объединение) высказываний | (III:2.2.35,ii)  |
| $\sigma(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$               | — спиновые матрицы  | (III:2.2.37)     |



|  |  |                |
|--|--|----------------|
| $\tau$                                     | — представление  | (III:2.3.1)    |
| $\mathcal{M}$                              | — коммутанта   | (III:2.3.4)    |
| $\mathcal{Z}$                              | — центр алгебры  | (III:2.3.4)    |
| $\Theta(x)$                                | — $\Theta$ -функция  | (III:2.3.14)   |
| $\tau_c(a)$                                | — точечный спектр  | (III:2.3.16)   |
| $\tau_{a.c}(a)$                            | — абсолютно непрерывный спектр                                 | (III:2.3.16)   |
| $\tau_s(a)$                                | — сингулярный спектр   | (III:2.3.16)   |
| $\tau_{ess}(a)$                            | — существенный спектр  | (III:2.3.18,4) |
| $\text{Tr } m$                             | — след   | (III:2.3.19)   |
| $\mathfrak{S}_1$                           | — операторы класса следа                                       | (III:2.3.21)   |
| $\mathfrak{S}_2$                           | — операторы Гильберта—Шмидта                                   | (III:2.3.21)   |
| $\mathfrak{K}$                             | — компактные операторы   | (III:2.3.21)   |
| $\mathbb{T}$                               | — символ упорядочения по времени                               | (III:2.4.10,3) |
| $D(a)$                                     | — область определения оператора $a$                            | (III:2.4.12)   |
| $\text{Ran}(a)$                            | — образ $D(a)$   | (III:2.4.13)   |
| $\Gamma(a)$                                | — граф оператора $a$   | (III:2.4.15)   |
| $a \supset b$                              | — $b$ — расширение оператора $a$                               | (III:2.5.1)    |
| $Q(q)$                                     | — область определения формы                                    | (III:2.5.17)   |
| $\mathcal{W}$                              | — алгебра Вейля  | (III:3.1.1)    |
| $(z, z')$                                  | — скалярное произведение                                       | (III:3.1.2,1)  |
| $a, b$                                     | — коммутатор   | (III:3.1.7)    |
| $L_m$                                      | — собственные векторы углового момента                         | (III:3.2.13)   |
| $L_{\pm}$                                  | — циркулярные компоненты $L$                                   | (III:3.2.13)   |
| $\text{ad}_H^n(a)$                         | — по определению равно $[H, \text{ad}_H^{n-1}(a)]$             | (III:3.3.1)    |
| $P_{a.c}$                                  | — проектор на абсолютно непрерывный спектр                     | (III:3.4.4)    |
| $A_{\pm}$                                  | — пределы асимптотических констант                             | (III:3.4.6)    |
| $\mathcal{A}_{\pm}$                        | — алгебра пределов операторов алгебры асимптотических констант | (III:3.4.6)    |
| $\mathfrak{F}$                             | — гомоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\pm}$      | (III:3.4.6)    |
| $P_{\pm}$                                  | — операторы Мёллера  | (III:3.4.7)    |
| $P_{\alpha}$                               | — проектор, соответствующий $H_{\alpha}$                       | (III:3.4.17)   |
| $Q_{\pm}$                                  | — разложение $P_{a.c}$ по каналам $\alpha$                     | (III:3.4.17)   |
| $S_{\pm}$                                  | — $S$ -матрица представления взаимодействия                    | (III:3.4.23)   |
| $P_H(\alpha)$                              | — проекционный оператор возмущенного $H(\alpha)$               | (III:3.5.1)    |
| $t$  | — $t$ -матрица   | (III:3.6.6)    |
| $f(\mathbf{k}, \mathbf{n}', \mathbf{n})$   | — амплитуда рассеяния  | (III:3.6.10,3) |
| $D$  | — оператор запаздывания  | (III:3.6.17)   |
| $\mathcal{D}(k, k_0)$                      | — дифференциальное сечение взаимодействия                      | (III:3.6.19)   |
| $\mathcal{D}$                              | — полное сечение взаимодействия                                | (III:3.6.19)   |
| $\sigma$                                   | — длина рассеяния  | (III:3.6.23,5) |
| $\mathfrak{F}$                             | — вектор Рунге—Ленца   | (III:4.1.7)    |
| $\sigma^{\pm}, \sigma^{\pm}, \sigma^{\pm}$ | — спиновые компоненты  | (IV:1.1.1)     |
| $\mathcal{F}$                              | — пространство Фока  | (IV:1.3.1)     |
| $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$          | — симметричное и антисимметричное тензорное произведение       | (IV:1.3.1)     |
| $\mathcal{F}, \mathcal{F}, \mathcal{F}(f)$ | — операторы рождения и уничтожения                             | (IV:1.3.2)     |
| $\mathcal{F}$                              | — антикоммутатор   | (IV:1.3.3,2)   |
| $\mathcal{F}$                              | — $C^*$ -алгебра для бозонов                                   | (IV:1.3.3,3)   |
| $\mathcal{F}$                              | — $C^*$ -алгебра для фермионов                                 | (IV:1.3.3,4)   |
| $\mathcal{F}, \mathcal{F}$                 | — операторнозначная обобщённая функция                         | (IV:1.3.3,7)   |
| $\mathcal{F}$                              | — циклический вектор   | (IV:1.3.5)     |
| $\mathcal{F}$                              | — $C^*$ -алгебра чётных многочленов                            | (IV:1.3.8)     |
| $\mathcal{F}$                              | — калибровочно-инвариантная алгебра                            | (IV:1.3.8)     |
| $\mathcal{F}$                              | — след   | (IV:1.4.10)    |
| $\mathcal{F}$                              | — факторы типа I, II, III                                      | (IV:1.4.16)    |
| $\mathcal{F}$                              | — сумма первых $n$ упорядоченных собствен                      | (IV:2.1.8)     |

|                               |  |                 |
|-------------------------------|--|-----------------|
| $\leq$                        | — упорядочение матриц плотности                                      | (IV:2.1.10,1)   |
| $S_\alpha$                    | — $\alpha$ -энтропия   | (IV:2.2.2)      |
| $S(\rho)$                     | — энтропия фон Неймана   | (IV:2.2.4)      |
| $d\Omega_z^N$                 | — мера Лиувилля на фазовом пространстве                              | (IV:2.2.7)      |
| $\rho_{кл}$                   | — классическая плотность фазового пространства                       | (IV:2.2.7)      |
| $\rho_{кв}$                   | — квантово-теоретическая плотность фазового пространства             | (IV:2.2.7)      |
| $S(\sigma \rho)$              | — относительная энтропия   | (IV:2.2.22)     |
| $\epsilon(\sigma, \rho)$      | — энергия, энтропия и плотность частиц                               | (IV:2.3.8)      |
| $T$                           | — температура  | (IV:2.3.16)     |
| $C_V, c_V$                    | — совокупная и удельная теплоемкость при постоянном объеме           | (IV:2.3.17,3)   |
| $P$                           | — давление   | (IV:2.3.21)     |
| $\kappa$                      | — коэффициент сжимаемости  | (IV:2.3.22,3)   |
| $\mu$                         | — химический потенциал   | (IV:2.3.27)     |
| $v_u$                         | — “размазанный” потенциал  | (IV:2.4.9)      |
| $\psi(T, \rho)$               | — преобразование Лежандра плотности энергии $\epsilon$               | (IV:2.4.14)     |
| $\mathcal{L}$                 | — преобразование Лежандра  | (IV:2.4.15,2)   |
| $z$                           | — летучесть  | (IV:2.5.9)      |
| $\text{tr}$                   | — след на одночастичном пространстве                                 | (IV:2.5.10)     |
| $v^u$                         | — “не размазанный” потенциал   | (IV:2.5.17)     |
| $F_\sigma(z)$                 | — обобщенная $\zeta$ -функция  | (IV:2.5.20)     |
| $m$                           | — намагниченность на единицу объема                                  | (IV:2.5.37)     |
| $\mathcal{R}$                 | — алгебра ковариантности   | (IV:3.1)        |
| $U$                           | — унитарные операторы  | (IV:3.1)        |
| $B_{\text{эф}}$               | — эффективное магнитное поле   | (IV:3.1.1,4)    |
| $\tau_t$                      | — эволюция во времени в гейзенберговской картине                     | (IV:3.1.2)      |
| $\tau_t^*$                    | — двойственная эволюция во времени в шредингеровской картине         | (IV:3.1.2)      |
| $\eta, \eta(a), \eta(\sigma)$ | — среднее по времени от наблюдаемой                                  | (IV:3.1.14)     |
| $E_0$                         | — проекция на собственные векторы гамильтониана $H$                  | (IV:3.1.16)     |
| $a_t$                         | — преобразованный оператор   | (IV:3.1.16,2)   |
| $\tilde{J}$                   | — сопряженно-линейный оператор                                       | (IV:3.2.1(iii)) |
| $\pi'$                        | — сопряженно-линейное представление                                  | (IV:3.2.1(ii))  |
| $\tilde{\mathcal{A}}$         | — алгебра аналитических операторов                                   | (IV:3.2.6(v))   |
| $f$                           | — образ Фурье  | (IV:3.2.6(v))   |
| $\tau_t^h$                    | — возмущение эволюции во времени                                     | (IV:3.3.2)      |
| $R_h$                         | — оператор соответствия  | (IV:3.3.4)      |
| $F_{ab}, G_{ab}$              | — корреляционные функции   | (IV:3.3.14)     |
| $\mathbf{X}_k, Z_k$           | — радиус-вектор и заряд $k$ -го ядра                                 | (IV:4.1.3,1)    |
| $W(\mathbf{x})$               | — стеночный потенциал  | (IV:4.1.3,4)    |
| $H_n$                         | — гамильтониан с эффективным полем                                   | (IV:4.1.6)      |
| $C_n$                         | — корреляционная поправка  | (IV:4.1.6)      |
| $\Xi(H)$                      | — большая каноническая сумма состояний                               | (IV:4.1.8)      |
| $\ n\ _c$                     | — $c$ -норма   | (IV:4.1.10)     |
| $h_n$                         | — одночастичный гамильтониан   | (IV:4.1.17)     |
| $v_s$                         | — короткодействующая сингулярная часть потенциала $1/r$              | (IV:4.1.18)     |
| $a_{p,q}, \rho_{p,q}$         | — оператор уничтожения, оператор плотности                           | (IV:4.1.25)     |
| $K$                           | — кинетическая энергия электронов                                    | (IV:4.1.33)     |
| $A$                           | — потенциал притяжения электронов к ядру                             | (IV:4.1.33)     |
| $R$                           | — потенциал отталкивания между электронами                           | (IV:4.1.33)     |
| $\Phi(\mathbf{x})$            | — потенциал для плотности электронов в конфигурационном пространстве | (IV:4.1.36)     |

# **I. Классические динамические системы**

## Предисловие ко второму немецкому изданию

За последние десятилетия область классических динамических систем переживает заметное возрождение, и многое из того, что при появлении первого издания этого курса казалось чрезмерно отягощенным математическими абстракциями, ныне вошло в арсенал активно работающего физика. Цель нового издания состоит в том, чтобы способствовать дальнейшему развитию математической физики, поэтому я попытался сделать курс более доступным и исправить замеченные ошибки.

Поскольку первое издание было чрезмерно перегружено для односеместрового курса лекций, новый материал был включен в настоящее издание лишь в той мере, в какой он мог способствовать изъятию части материала или упрощению изложения. Тем не менее, чтобы отразить новую тенденцию в математической физике, пришлось расширить главу с доказательством теоремы КАМ. Эта тенденция состоит не только в использовании более тонких математических методов, но и в переосмысливании такого понятия, как фундаментальность. То, что раньше воспринималось как результат небрежных вычислений, ныне предстает как следствие более глубокого принципа. Даже открытые Кеплером соотношения между радиусами планетных орбит, которые ранее предпочитали обходить молчанием как некую мистическую бессмыслицу, по-видимому, указывают путь к истине, ускользающей при поверхностном рассмотрении: вложенные определенным образом друг в друга правильные платоновы тела приводят к иррациональным отношениям радиусов, но эти отношения удовлетворяют алгебраическим уравнениям низших степеней. Именно такие иррациональные числа особенно плохо аппроксимируются рациональными, и траектории с такими отношениями радиус-векторов особенно устойчивы по отношению к взаимным возмущениям, поскольку менее других подвержены резонансным явлениям. В последнее время был получен ряд поразительных результатов по хаотическим системам. К сожалению, их доказательство увело бы нас далеко за рамки данного курса и поэтому не приводится.

При подготовке нового издания весьма ценными были замечания коллег, использовавших первое издание при чтении лекций. Я хотел бы выразить особую благодарность Х. Гроссе, Х.-Р. Грюмму, Х. Нарнхофер, Х. Урбантке и прежде всего М. Брайтенекеру. Как и прежде, рисунки Р. Бертльмана и И. Эккера и великолепный компьютерный набор Ф. Вагнер в немалой мере способствовали качеству издания. К сожалению, список литературы, как и в первом издании, имеет довольно случайный характер, поскольку более-менее полный перечень ссылок намного превзошел бы всякий разумный объем.

Вена, июль 1988 г.

*Вальтер Турринг*

# 1. Введение

## 1.1. Уравнения движения

Основы механики, которая занимается изучением движения точечных частиц, были заложены Ньютоном в книге “Математические начала натуральной философии”, вышедшей в 1687 г. В этом классическом труде содержится не тщательно продуманная система аксиом, а (в соответствии с уровнем знаний той эпохи) некоторые утверждения, имеющие, как выяснилось впоследствии, различную степень общности и значимости. В качестве исходного пункта выберем **второй закон Ньютона** — “сила равна произведению массы на ускорение”<sup>†</sup>. Пусть  $\mathbf{x}_i(t)$  — декартовы координаты  $i$ -й частицы, рассматриваемые как функции времени. Тогда справедливы уравнения

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i(t)}{dt^2} = \mathbf{K}_i(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1.1)$$

где  $\mathbf{K}_i$  — сила, действующая на  $i$ -ю частицу. Насколько известно в настоящее время, в природе существуют четыре фундаментальные силы, называемые также взаимодействиями: сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное. В литературе по физике упоминаются и многие другие силы — сила трения, обменные силы, силы связи, фиктивная (центробежная) и гармоническая силы, но они не представляют для нас интереса. Что же касается первого из трех фундаментальных взаимодействий, то оно проявляется лишь в области, лежащей вне сферы применимости классической механики, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только гравитационное и электромагнитное взаимодействия.

Точные выражения для этих двух сил в общем случае очень сложны, но в пределе, когда скорость частиц во много раз меньше скорости света  $c$ , выражения для гравитационного и электромагнитного взаимодействий сильно упрощаются. Их можно записать как градиент ньютоновского или кулоновского потенциала в виде

$$\mathbf{K}_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3} (\kappa m_i m_j - e_i e_j), \quad (1.1.2)$$

где  $\kappa$  — гравитационная постоянная;  $e_i$  — электрические заряды частиц.

Для элементарных составляющих вещества, например протонов,  $e^2$  и  $\kappa m^2$  — величины совершенно различного порядка:  $e^2 \sim 10^{36} \kappa m_p^2$ . То, что гравитация вообще ощутима, связано с тем, что все массы положительны и суммируются, в то время как заряды могут нейтрализоваться. Для небесных тел (для Солнца  $N \sim 10^{57}$ ) в уравнение (1.1.2) существенный вклад вносит только гравитация. Возможно, применимость уравнений (1.1.1) к небесным телам может вызвать сомнения, поскольку их вряд ли можно считать точечными, и на первый взгляд не вполне ясно, как понимать их координаты  $\mathbf{x}_i$ . В связи с этим следует заметить, что центр масс всего тела движется как точка, к которой приложена результирующая всех действующих на тело сил. Впрочем, на практике подобного рода проблемы не возникают, поскольку размеры небесных тел малы по сравнению с характерными расстояниями между ними.

Чтобы получить наглядное представление о значимости введенных выше фундаментальных постоянных, рассмотрим прежде всего порядки величин, входящих в (1.1.1) и (1.1.2).

<sup>†</sup>Ньютон формулирует второй закон движения несколько иначе: “Изменение количества движения пропорционально приложенной силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует”. В таком виде второй закон Ньютона применим и к движению тел переменной массы. (Прим. пер.)

Если частица движется по орбите радиуса  $R$  с периодом обращения вокруг звезды, содержащей  $N \sim 10^{57}$  протонов, то (1.1.1) и (1.1.2) по существу означают, что

$$\frac{R^3}{\tau^2} = N \mathcal{M}_p, \quad (1.1.3)$$

где в случае чистой гравитации масса обращающейся частицы в правой и левой частях сокращается. В системе единиц СГС  $\mathcal{M}_p \sim 10^{-32}$ , поэтому при заданном радиусе  $R$  период обращения  $\tau \sim 10^{16} N^{-1/2} R^{3/2}$ , а скорость  $v \sim 10^{-16} R^{-1/2} N^{1/2}$ . Для характерных космических расстояний и  $N \sim 10^{57}$  имеем:

|                | $R$ , см  | $\tau$ , с | $v$ , см/с |
|----------------|-----------|------------|------------|
| Орбита Земли   | $10^{13}$ | $10^7$     | $10^6$     |
| Двойная звезда | $10^{11}$ | $10^4$     | $10^7$     |
| Черная дыра    | $10^5$    | $10^{-5}$  | $10^{10}$  |

Мы видим, что небесные тела, имеющие размеры планет Солнечной системы, движутся со скоростями 10–100 км/с, которые могут показаться необычайно большими, но, по сравнению со скоростью света, довольно незначительны. Только когда размеры небесных тел достигают размеров черных дыр, т.е. когда масса звезды оказывается сжатой в области, имеющей поперечник в несколько километров, гравитация приводит к скоростям, сравнимым со скоростью света. Тогда уравнения движения Ньютона становятся неприменимыми и подлежат замене соответствующими релятивистскими уравнениями, к рассмотрению которых сейчас перейдем.

Как уже отмечалось, электрическое взаимодействие двух протонов в  $10^{36}$  раз сильнее гравитационного. Для системы протон – электрон эта величина возрастает на три порядка ( $10^3$  – отношение массы протона к массе электрона) и достигает  $10^{39}$ . Следовательно, соотношения между  $R$ ,  $\tau$  и  $v$  принимают следующий вид:  $\tau \sim 10^{-7/2} R^{3/2} N^{-1/2}$ ,  $v = 10^{7/2} R^{-1/2} N^{1/2}$ . В области атомных масштабов ( $R \sim 10^{-8}$  см) уже при  $N = 1$  достигаются вполне впечатляющие скорости:  $\tau \sim 10^{-15.5}$  с,  $v \sim 10^{7.5}$  см/с. Таким образом, заряженные элементарные частицы могут быть также сравнительно легко ускорены до скоростей, близких к скорости света, что делает необходимым обобщение уравнений Ньютона.

Закон, заменяющий (1.1.1) и (1.1.2), лучше всего формулировать, если  $ct$  и  $x$  рассматривать как зависимые переменные, а в качестве независимой переменной ввести параметр  $s$ , называемый собственным временем и нормированный таким образом, чтобы  $ds^2 = c^2 dt^2 - |dx|^2$ . В этом случае напряженность электромагнитного поля  $F_\beta^\alpha$  – не вектор, а тензорное поле второго ранга, и уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле, обобщающее уравнение (1.1.1), имеет следующий вид (суммирование по  $\beta$ ):

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = e F^\alpha_\beta(x) \frac{dx^\beta}{ds}. \quad (1.1.4)$$

Силу в (1.1.2) можно представить в виде градиента некоторого потенциала. В релятивистском случае напряженность электромагнитного поля может быть выражена через производные вектор-потенциала  $A^\alpha$ :

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} A_\alpha. \quad (1.1.5)$$

Зависимость вектор-потенциала  $A$  от положений (или, точнее, от траекторий) заряженных частиц в релятивистском случае гораздо сложнее, чем (1.1.2), и будет приведена в теории поля. Пока же мы вынуждены довольствоваться ограниченной постановкой задачи о движении частицы в заданном внешнем поле.

Область применимости уравнения (1.1.4) достаточно узка, потому что макроскопические тела редко достигают скоростей, близких к скорости света, а движение элементарных частиц по существу относится к квантовой теории. Тем не менее во многих случаях классическое уравнение (1.1.4) отражает наиболее существенные особенности поведения тел.

Уравнения движения в гравитационном поле, обобщающие уравнение (1.1.1) на случай тел, движущихся с околосветовыми скоростями, оказываются более сложными, чем уравнение (1.1.4). Как и в нерелятивистском случае, сила пропорциональна массе, но описывается величиной с тремя индексами:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds}. \quad (1.1.6)$$

Итак, гравитация описывается в обобщенном виде метрикой  $g$ , образующей симметричный тензор второго ранга, а коэффициенты связности Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} (g^{-1})^{\alpha\sigma} \left( \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (1.1.7)$$

Тогда опять будем вынуждены обратиться к теории поля, чтобы определить  $g_{\alpha\beta}(x)$  при заданном распределении масс. Пока ограничимся изучением уравнений движения при некоторых  $g$  и обнаружим, что, несмотря на математическую структуру, аналогичную структуре уравнения (1.1.1), с точки зрения физики оказываемся в совершенно ином мире.

## 1.2. Математический язык

Прежде всего заметим, что уравнение движения (1.1.1) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка в  $\mathbb{R}^{3N}$ . Но поскольку силы (1.1.2) имеют особенности в точках  $x_i = x_j, i \neq j$ , то удобно исключить эти точки и работать в открытом подмножестве пространства  $\mathbb{R}^{3N}$ . Правда, при этом теряется вся информация о том, что происходит после столкновения, и это не лишено смысла, ибо в противном случае уравнения (1.1.1) неизбежно выводили бы за пределы того круга, где их применение физически обосновано. Вводя вместо  $t$  другую переменную, можно регуляризовать уравнения таким образом, чтобы решение имело продолжение после столкновения (см. [6, 7]). Однако такие регуляризованные решения с точки зрения физики представляют собой интерес лишь как возможность более точно численно проанализировать то, что происходит непосредственно перед столкновением, но они не могут описывать истинные катастрофы.

Однако расширим математическую область определения уравнений движения на открытое множество пространства  $\mathbb{R}^{3N}$ . Процедура дифференцирования использует только локальные свойства евклидова пространства и может быть перенесена на все, что с точки зрения безоружного наблюдателя выглядит как евклидово пространство. Таким образом, приходим к понятию дифференцируемого многообразия, воплощающего в себе идею наглядных представлений о гладкости подобно тому, как топология аксиоматизирует понятие непрерывности. В пользу введения дифференцируемых многообразий можно привести следующие соображения:

1. В трехмерном пространстве с выколотым началом координат полярные координаты для многих целей более удобны, чем декартовы. Пространство при использовании полярных координат выглядит не как открытое подмножество в  $\mathbb{R}^3$ , а как прямое произведение (положительные числа)  $\times$  (поверхность сферы). Поэтому желательно сформулировать дифференциальное исчисление для сферических поверхностей, которые не являются открытыми подмножествами в  $\mathbb{R}^n$ .

2. Если постоянная движения  $K$  известна, то уравнения движения можно ограничить поверхностью  $K = \text{const}$ , которая также представляет собой многообразие. Таким типичным случаем может быть движение на торе, которое по своим свойствам совершенно отлично от свободного движения в  $\mathbb{R}^n$ .
3. Уравнение (1.1.6) или задачи со связями формулируются в общем случае прежде всего на многообразиях.
4. Для понимания математической структуры классической механики существенно различать локальные и глобальные величины. Так, гамильтонова система с  $n$  степенями свободы всегда обладает локально  $2n - 1$  не зависящими от времени постоянными. Основной вопрос состоит в том, сколько из этих постоянных могут быть определены глобально. Понятие многообразия позволяет уяснить различие между локальными и глобальными величинами.

В следующей главе раскроем необходимые математические методы. Отношение между числом теорем и числом определений (почти бесконечно малое) отчетливо показывает, что речь идет не о получении глубоких результатов, а об обобщении и уточнении тех знаний, которые связаны с воспоминаниями о некогда прослушанном курсе элементарной математики, с вычислительными методами и со здравым смыслом. Здесь речь идет и о том, чтобы расширить то, что раньше в механике называлось кинематикой. Различные бесконечно малые величины, например “бесконечно малые вариации” и “бесконечно малые перемещения”, исчезают, уступая место более точному понятию — отображениям касательных пространств. Последние вместе с ассоциированными с ними расслоениями и служат той сценой, на которой разыгрываются динамические явления, где, грубо говоря, касательное расслоение — пространство переменных  $q$  и  $\dot{q}$ , а кокасательное расслоение — пространство переменных  $q$  и  $p$ , т.е. фазовое пространство. После небольших приготовлений приходим к символике Картана, в которой все правила элементарного дифференциального и интегрального исчисления записываются с помощью немногих символов. На первый взгляд, переход к символике Картана может показаться упражнением в абстрактном стиле записи. Однако преимуществом здесь служит то, что абстрактные обозначения позволяют упростить общие утверждения классической механики, например теорему Лиувилля, до тривиальностей.

### 1.3. Физическая интерпретация

При интерпретации формализма необходимо прежде всего прийти к соглашению относительно того, что такое наблюдаемые величины (или просто наблюдаемые). Обычно наблюдаемым соответствуют координаты и импульсы частиц. Разумеется, при этом нет никаких оснований оказать предпочтение декартовой системе координат, например, в астрономии непосредственному измерению подлежат прежде всего углы. Поэтому в качестве наблюдаемых мы должны рассматривать произвольные функции координат (и импульсов), удовлетворяющие только требованиям ограниченности и, кроме того (из соображений удобства выполнения математических операций), дифференцируемости. Эти функции образуют (абелеву) алгебру, а их эволюция во времени, определяемая уравнениями движения, соответствует автоморфизму алгебры, так как суммы преобразуются в суммы, а произведения — в произведения. В концептуальном плане полезно различать алгебру наблюдаемых от состояния, в котором находится определенный экземпляр системы. Состояние не имеет никакого отношения к законам природы, а лишь отражает наше знание реализованных начальных условий.

В то время как наблюдаемые являются функциями на фазовом пространстве, состояния представлены вероятностными мерами на том же пространстве. В более подробном



изложении это означает следующее: если  $q$  и  $p$  — обобщенные координаты в фазовом пространстве, то состоянию соответствует такое распределение вероятности  $\rho(q, p)$ , что среднее ожидаемое значение большого числа измерений наблюдаемой  $f(q, p)$  должно быть

$$\bar{f} = \int d^{3n}q d^{3n}p \rho(q, p) f(q, p). \quad (1.3.1)$$

Заметим, что при этом

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \text{но} \quad \overline{f \cdot g} \neq \bar{f} \cdot \bar{g}.$$

Это означает, что флуктуации  $\overline{(f - \bar{f})^2} \neq 0$  возникают, если только мера  $d^{3n}q d^{3n}p \rho$  не сосредоточена в точке. Такое “экстремальное” состояние соответствует полному знанию всех координат и импульсов. Решение уравнений движения дает нам траекторию  $q(0), p(0) \rightarrow q(t), p(t)$  и упоминавшийся выше автоморфизм

$$f(q, p) \rightarrow f(q(t), p(t)).$$

Такого рода концептуальное различие между наблюдаемыми и состояниями, хотя и становится неизбежным только в квантовой механике, в классической механике позволяет обратить внимание на истинную природу проблемы. Суть дела заключается в том, чтобы решить уравнения движения не при некоторых случайных начальных условиях, а при произвольных начальных условиях. В частности, возникает важный вопрос об устойчивости решений относительно малых возмущений начальных условий, которые в действительности никогда не бывают точно известны. Такой подход представляет собой особый интерес для статистической физики, в которой относительно системы со многими степенями свободы задается лишь небольшое количество информации, и для изучаемых явлений решающее значение имеют отсутствие устойчивости и перемешивающие свойства эволюции во времени.

Разумеется, последовательное выполнение такой программы в случае реалистических сил (1.1.2) сразу же наталкивается на трудности. Как уже упоминалось, при столкновении траектория выходит из области определения задачи. Это означает, что после столкновения мы не можем следить за эволюцией системы во времени. Поскольку начальные условия всегда можно выбрать так, чтобы столкновение произошло через сколь угодно малый интервал времени, никакого автоморфизма алгебры не возникает. В задаче двух тел ситуацию иногда удастся исправить путем исключения из фазового пространства области с нулевым угловым моментом, поскольку в остальной части фазового пространства столкновения не могут происходить. Но в задаче трех тел такой прием позволяет исключить лишь тройные столкновения, а если требуется получить автоморфизм, то необходимо произвести регуляризацию уравнений движения путем введения другой переменной времени. В релятивистском случае (1.1.4,6) ситуация еще опаснее, и уже в задаче двух тел частицы с ненулевым угловым моментом могут быть затянуты в сингулярность. В общих чертах можно сказать, что возникает не только черная точка, но и черная дыра. Следовательно, нам необходимо умерить наши требования и довольствоваться рассмотрением не столь больших областей фазового пространства. При этом наиболее важными являются следующие вопросы. Какие конфигурации устойчивы? Происходят ли когда-нибудь столкновения? Уходят ли частицы когда-нибудь на бесконечность? Всегда ли траектории остаются в ограниченной области фазового пространства? Трудность ответа на эти вопросы связана со словами “всегда” и “когда-нибудь”. Вычисления на компьютерах и нередко математические теоремы существования гарантируют только ответы на вопросы о ближайшем будущем. Что касается долгосрочных предсказаний, то они заведомо неточны. Впрочем, утверждение о том, что некоторое событие произойдет, утрачивает интерес для физики, если время ожидания превосходит время жизни Вселенной.

Как известно, в случае уравнений (1.1.1), (1.1.2) для двух частиц все конечные траектории периодические. Однако такого рода ситуация является скорее исключением, чем правилом: в

случае релятивистских уравнений (1.1.4), (1.1.6) или трех частиц ситуация иная. Типичными являются квазипериодические траектории, которые, неоднократно возвращаясь, проходят сколь угодно близко от начальной точки, но не замыкаются, а всюду плотно заполняют некие области более высокой размерности (образуя фигуры Лиссажу с иррациональным отношением частот). Между такими квазипериодическими траекториями располагаются "окна" со строго периодическими траекториями. В случае уравнения (1.1.2) с  $e_j = 0$  и более чем двумя частицами существует сильное подозрение, что траектории, по которым частицы уходят на бесконечность, заполняют большую часть фазового пространства при любой энергии. Энергетически такая ситуация вполне возможна, так как остающиеся частицы могут восполнять потери энергии за счет потенциальной энергии. Действительно, как показывают компьютерные расчеты [8], две частицы достаточно быстро сближаются настолько, что высвобождаемой энергии оказывается достаточно, чтобы удалить одну из них на бесконечность. Ясно, что такого рода процесс имеет огромное значение для устойчивости планет и звездных систем.

В заключение рассмотрим, как физическое пространственно-временное многообразие формируется под действием законов механики. Сначала структура пространства-времени кажется заданной априори. Однако она определяется реальными мерными стержнями и часами, которые подчиняются уравнениям движения<sup>1</sup>. Поэтому необходимо более подробно выяснить, согласуются ли с нашими исходными предположениями относительно пространства и времени соотношения между мерными стержнями и часами, следующие из уравнений движения. Например, увидим, что согласно уравнениям (1.1.6) пространство-время утрачивает свой псевдоевклидов характер и обретает риманову структуру. Иначе говоря, гравитация влияет на мерные стержни таким образом, что измеряемое ими пространство кажется искривленным.

Привлекательность механики материальных точек заключается в том, что, несмотря на простоту основных законов, допустимые траектории порождают необычайно сложную картину, разобраться в которой удастся лишь в редких случаях. Уже из этого ясно, что весьма сложные явления могут описываться законами природы, которые формулируются очень кратко.

---

<sup>1</sup>Разумеется, реальное вещество описывается квантовой теорией, поэтому сейчас несколько забегаем вперед и предвосхищаем последующее более подробное изложение.

## 2. Анализ на многообразиях

### 2.1. Многообразия

*С помощью понятия многообразия наглядное представление о гладких поверхностях становится объектом изучения в математическом анализе. В малом многообразии выглядит как евклидово пространство, что позволяет определить на нем операции с бесконечно малыми, например дифференцирование. Но в большом многообразии может обладать иной топологией, чем  $\mathbb{R}^n$ .*

Функция  $f$ , действующая из открытого подмножества  $U$  пространства  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^m$ , дифференцируема в точке  $x \in U$ , если она может быть аппроксимирована в  $x$  линейным отображением  $Df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Понятие дифференцируемого многообразия можно уточнить, потребовав, чтобы при каждом  $\varepsilon > 0$  существовала окрестность  $U_{x,\varepsilon}$  точки  $x$ , такая, что

$$\|f(x') - f(x) - Df(x)(x' - x)\| < \varepsilon \|x - x'\| \quad \forall x' \in U_{x,\varepsilon},$$

где  $x$  и  $f$  — векторы соответственно из  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$ ;  $\|v\|$  — длина вектора  $v$ . В дальнейшем всегда будем пользоваться векторными и матричными обозначениями, опуская индексы, за исключением тех случаев, когда их необходимо особо отметить. В покомпонентной записи  $Df$  задается матрицей частных производных

$$(Df)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.1.1)$$

#### Примечания (2.1.2)

1. Функция  $f$  должна быть задана в окрестности точки  $x$ . Говоря просто о дифференцируемости (во всех точках), необходимо иметь дело с отображением некоторого открытого множества.
2. Дифференциал отображения  $Df$  задает в каждой точке линейное отображение  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Оно имеет следующий смысл: если траектория  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  проходит через точку  $x$ , то  $Df(x)$  переводит направление кривой  $u(I)$  в направление образа кривой под действием функции  $f$  ( $df_i(x(t))/dt = f_{i,j} dx_j/dt$ ).
3. Частные производные  $Df_{ij}$  можно рассматривать как функции, а именно как отображение в линейные преобразования, т.е.  $Df : U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ . Как функция, производная в свою очередь может быть дифференцируемой. Это просто означает, что  $f_{i,j}$  снова дифференцируемы. Обозначим  $C^p$  множество  $p$  раз непрерывно дифференцируемых функций,  $C^\infty$  — множество сколь угодно раз дифференцируемых функций.

В этом параграфе распространим дифференцируемость на множества  $M$ , которые только локально похожи на открытые множества в  $\mathbb{R}^n$ . В параграфе 2.2 рассмотрим пространства, которые могут быть линейно отображены с помощью производной. Прежде всего введем некоторые понятия, смысл которых интуитивно ясен, поскольку эти понятия имеют географический “привкус”.

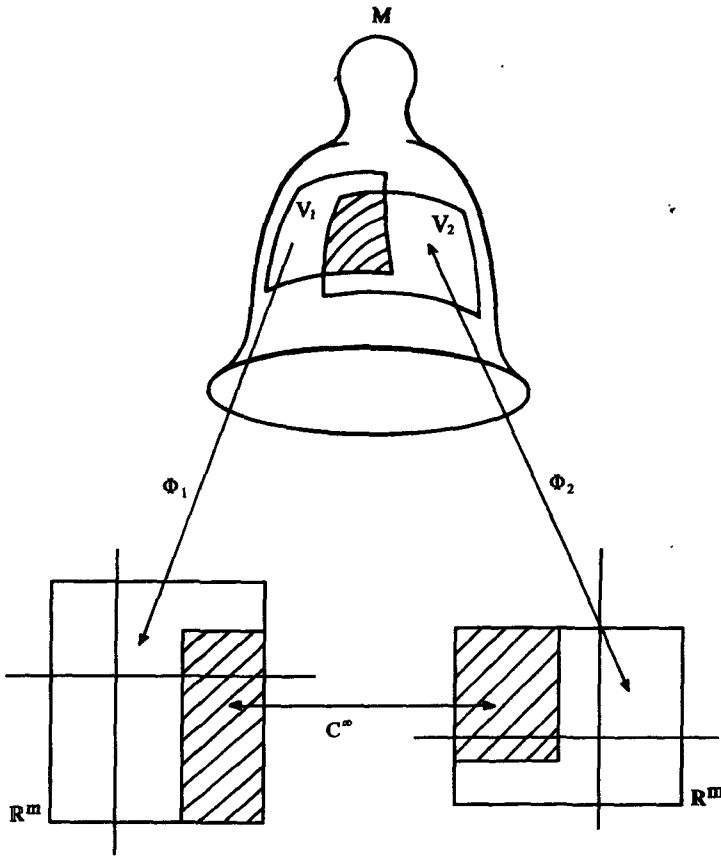


Рис. 2.1. Согласованность двух карт

**Определение (2.1.3)**

Пусть  $M$  — топологическое пространство. **Картой**  $(V, \Phi)$  называется гомеоморфизм  $\Phi$  открытого множества  $V$  из  $M$  (области карты) на открытое множество из  $\mathbb{R}^m$ . Две карты называются **согласованными**, если  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  или если, при  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$  отображения  $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$  и  $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ , очевидным образом ограниченные, являются  $C^\infty$ -отображениями открытых множеств в  $\mathbb{R}^m$  (рис. 2.1).

**Определение (2.1.4)**

**Атласом** называется множество согласованных карт, покрывающих  $M$ . Два атласа называются **согласованными**, если все их карты согласованы.

**Примечания (2.1.5)**

1. Ясно, что согласованность атласов является отношением эквивалентности. Действительно, каждый атлас согласован с самим собой, и определение согласованности симметрично. Далее, если атлас  $\bigcup_i (V_{1i}, \Phi_{1i})$  согласован с атласом  $\bigcup_k (V_{2k}, \Phi_{2k})$ , а тот в свою очередь согласован с  $\bigcup_j (V_{3j}, \Phi_{3j})$ , то  $(V_{1i}, \Phi_{1i})$  согласован с  $(V_{3j}, \Phi_{3j})$ : для доказательства необходимо лишь покрыть  $V_{1i} \cap V_{3j}$  областью  $V_{2k}$  и воспользоваться тем, что вместе с  $f$  и  $g$  дифференцируема и функция  $f \circ g$ .
2. Предположим, что все карты отображают  $M$  в  $\mathbb{R}^m$  с одним и тем же  $m$ . В этом случае число  $m$  называется **размерностью топологического пространства  $M$** . Иногда это

**определение** используется и при  $m = 0$ , хотя в этом случае  $\mathbb{R}^0$  — точка, и дифференцирование теряет смысл.

3. Если множества  $V$  выбраны достаточно малыми, то можем полагать, что они все связны.

**Определение (2.1.6)**

*Дифференцируемое многообразие  $M$  задается сепарабельным метризуемым пространством  $M$  и классом эквивалентности его атласов.*

**Примеры (2.1.7)**

В приводимых ниже примерах  $M$  в большинстве случаев — подмножество из  $\mathbb{R}^n$  и по предположению надделено топологией, индуцированной топологией в  $\mathbb{R}^n$ .

1.  $M = \mathbb{R}^n = V$ ,  $\Phi = 1$ ; в этом случае необходима только одна карта. То же верно и в несколько более общем модельном случае открытого подмножества в  $\mathbb{R}^n$ .
2.  $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  называется одномерной сферой  $S^1$  или одномерным тором  $T^1$ .  $M$  компактно и поэтому не гомеоморфно никакому открытому множеству из  $\mathbb{R}$ . В этом случае необходимы, по крайней мере, две карты:

$$V_1 = T^1 \setminus \{(-1, 0)\}, \quad \Phi_1^{-1} : \varphi \rightarrow (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad -\pi < \varphi < \pi,$$

$$V_2 = T^1 \setminus \{(1, 0)\}, \quad \Phi_2^{-1} : \varphi \rightarrow (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Согласованность  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  тривиальна (см. задачу (2.1.25,1), но  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  нельзя заменить одним отображением (рис. 2.2).

$$\underbrace{T^1 \times T^1 \times \dots \times T^1}_{n \text{ раз}} = T^n$$

есть  $n$ -мерный тор,  $S^n := \{(x_i) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  —  $n$ -мерная сфера.

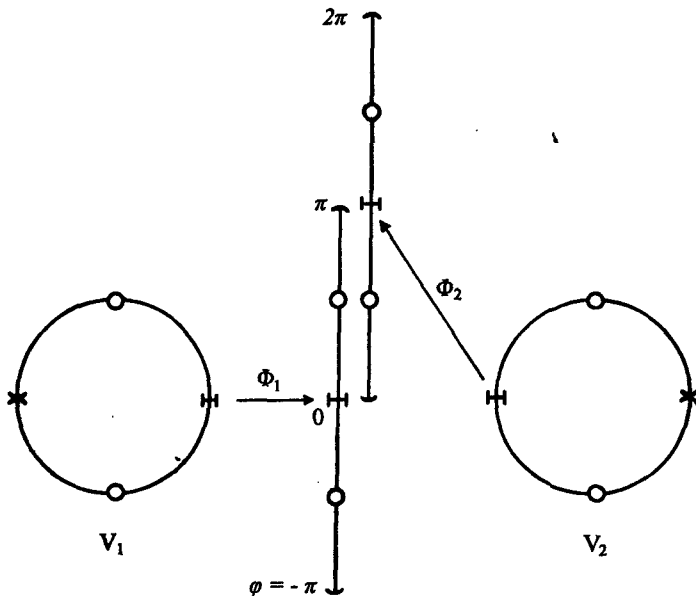
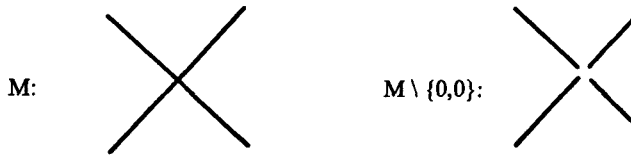


Рис. 2.2. Атлас для  $T^1$ . Знаками  $|$  и  $\circ$  помечены соответствующие точки.

3.  $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} = V$ ,  $\Phi = 1$ ; поскольку  $M$  — открытое множество, в  $\mathbb{R}^n$  для покрытия  $M$  требуется только одна карта. Но так как  $M$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^+ \times S^1$ , то возникает мысль об атласе из двух карт (**полярные координаты**).
4. Пусть задана функция  $f \in C^1$  и  $M = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0 \forall x \exists j \text{ с } f_{,j} \neq 0\}$ . Это обобщает пример (2.1.7,2), а теорема о неявных функциях гарантирует существование соответствующих карт, поэтому  $M$  —  $(n - 1)$ -мерное многообразие. Условие относительно производной, очевидно, необходимо, поскольку если, например,  $f$  — функция, тождественно равная постоянной, то прообраз  $0$  есть либо пустое множество, либо все пространство  $\mathbb{R}^n$ .
5.  $n^2$  элементов матрицы размерности  $(n \times n)$  определяют точку в  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Поэтому множество матриц размерности  $(n \times n)$  можно идентифицировать с  $\mathbb{R}^{n^2}$ , и оно наследует структуру последнего как многообразия (и как векторного пространства). Обратимые матрицы  $M$ ,  $\det M \neq 0$ , образуют открытое подмножество и группу  $GL(n)$ . Унимодулярные матрицы  $M$ ,  $\det M = 1$ , характеризуются условием типа примера (2.1.7,4), и поэтому также образуют  $(n^2 - 1)$ -мерное подмногообразие.
6.  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| = |x_2|\}$ . Это множество не является многообразием, так как каждая окрестность точки  $\{0, 0\} \in M$  без нее распадается на четыре компоненты вместо двух:



и поэтому не может быть гомеоморфно отображена на открытый интервал.

7.  $M = \bigcup_{n=1,2,\dots} \{\frac{1}{n}, \mathbb{R}\} \cup \{0, \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ . Это множество также не многообразие, поскольку оно не является локально связным в точке  $(0, 0)$  (см. задачу (2.1.25,3)).
8. Если заданы два многообразия  $M_1$  и  $M_2$ , то можно образовать **произведение многообразий**  $M_1 \times M_2$  (см. примеры (2.1.7,2) и (2.1.7,3)). Это множество естественно наделено топологией произведения, а произведение карт  $(V_1, \Phi_1) \times (V_2, \Phi_2) = (V_1 \times V_2, \Phi_1 \times \Phi_2)$  использует отображение  $(q_1, q_2) \rightarrow (\Phi_1(q_1), \Phi_2(q_2))$  в  $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ . Ясно, что произведение двух атласов есть атлас, так как условия покрытия и согласованности выполнены.

### Примечания (2.1.8)

1. В примерах (2.1.7,1–4) многообразие  $M$  задано непосредственно как подмножество пространства  $\mathbb{R}^n$  с индуцированной топологией. Однако такое возможно далеко не всегда. Многообразия разумно строить из частично перекрывающихся областей. Такое построение определяет глобальную структуру, тогда как локально все определяется размерностью. Впрочем, можно показать [1, гл. 16,25], что любое  $m$ -мерное многообразие гомеоморфно подмножеству пространства  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .
2. Чтобы исключить некоторые “патологии”, необходимо предположение о сепарабельности, поскольку это свойство не следует из локальной евклидовости. Поэтому вводим на  $M$  топологию, а не определяем ее с помощью карт. Пример:  $M = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}$  с дискретной топологией),  $V_y = \mathbb{R} \times \{y\}$ ,  $\Phi_y : (x, y) \rightarrow x$ . В этой по существу неправильной конструкции плоскость становится одномерным многообразием.

3. В большинстве случаев предполагаем, что многообразия принадлежат классу  $C^\infty$ , и требование неограниченной дифференцируемости не несет чрезмерную нагрузку. Разумеется, многие результаты можно было бы получить при более слабых предположениях, но выяснение оптимизации не входит в нашу задачу. Более того, в дальнейшем не всегда будем проверять выполнимость всех предположений о дифференцируемости. Эту проверку предоставляем читателю. Никаких трудностей при этом не возникнет, так как в подобного рода локальных вопросах все происходит, как в  $\mathbb{R}^n$ . По той же причине будем говорить просто о многообразиях, а не о бесконечно дифференцируемых многообразиях.
4. Поскольку в интересующих нас случаях большинство функций допускают аналитическое продолжение, в некоторых случаях удобно работать с комплексными многообразиями. При этом пространство  $\mathbb{R}^n$  просто заменяется пространством  $\mathbb{C}^n$ , а дифференцируемость любого порядка считается эквивалентной аналитичности. В качестве примера комплексного многообразия можно упомянуть хотя бы риманову поверхность функций  $\sqrt{z}$  или  $\ln z$ .
5. В физике вместо карт часто говорят о **локальной системе координат** или о **параметризации**. То, что многообразие  $M$  определяется не одним атласом, а классом эквивалентности атласов, — не что иное как математическая формулировка “**общей ковариантности**”. Все системы координат равноправны. Для открытого множества в  $\mathbb{R}^n$  может оказаться достаточно одной евклидовой карты, но такая система координат не имеет каких-либо преимуществ перед другими системами координат, которые требуют введения нескольких карт (как и в случае полярных координат), но могут оказаться предпочтительнее в других отношениях. Разумеется, образы окрестностей в  $M$  на различных картах выглядят по-разному. Но без дополнительной информации, например, о том, какова метрика пространства, невозможно сказать, какой из этих образов менее “искажен” по сравнению с “истинным”.

Как нам уже известно (см. примеры (2.1.7,6–7)), не каждое подмножество пространства  $\mathbb{R}^n$  может быть использовано в качестве многообразия. Для этого подмножество не обязательно должно быть открытым в  $\mathbb{R}^n$ , но, по крайней мере, должно допускать введение на нем дифференцирования. Возникает вопрос, когда структура многообразия может быть перенесена на подмножество.

#### Определение (2.1.9)

$N \subset M$  называется  $n$ -мерным подмногообразием, если для всех  $q \in N$  существует карта  $(V, \Phi)$ , где  $q \in V \subset M$ , и  $\Phi: \Phi(V) \subset \mathbb{R}^m$ , такое, что  $\Phi(q') = (x_1 \dots x_n, 0 \dots 0) \forall q' \in N \cap V$ .

#### Примеры (2.1.10)

1. Подмножество  $N$  является открытым в  $M$ . Это тривиальный случай, когда  $m = n$ .
2.  $N = S^1, M = \mathbb{R}^2$ . Наши карты в (2.1.7,2) не приведены к виду (2.1.9), но это нетрудно сделать (задача (2.1.25,2)).
3. Пусть  $f_i, i = 1, \dots, k \leq m$ , — дифференцируемые отображения  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , такие, что векторы  $Df_i$  в каждой точке, где  $f_i = 0, i = 1, \dots, k$ , линейно независимы, т.е. ранг матрицы  $f_{i,j}, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m$ , максимален. Тогда по теореме о ранге матрицы [1, гл.10, 3]  $N = \{x \in \mathbb{R}^m : f_i(x) = 0 \forall i\}$  — замкнутое подмногообразие размерности  $(m - k)$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$ . В частности, ортогональные матрицы  $M M^T = 1$  образуют замкнутое подмногообразие обратимых матриц (ср. (2.1.7,5)).
4.  $M = \mathbb{R}^2, N = \{x \in M : x_2 = |x_1|\}$  можно наделять структурой многообразия, но  $N$  не является подмногообразием<sup>†</sup> многообразия  $M$ :  $N$  имеет излом, который даже с помощью нового набора карт нельзя представить в дифференцируемой форме, требуемой

<sup>†</sup> $N$  — объединение трех подмногообразий.

в определении. Но атлас  $(V = N, \Phi : (x_1, x_2) \rightarrow x_1)$  превращает  $N$  в многообразие (рис. 2.2а.).

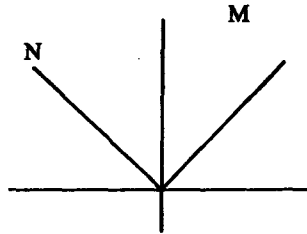


Рис. 2.2а.

### Примечания (2.1.11)

1. Нетрудно видеть, что введенный в (2.1.9) атлас задает на  $N$  структуру дифференцируемого многообразия: требуемая для согласованности дифференцируемость не нарушается, так как изменяются только первые  $n$  координат.
2. Последний пример показывает, что многообразие  $M$ , даже если с точки зрения теории множеств и топологии оно является подпространством пространства  $\mathbb{R}^n$ , не обязательно должно быть подмногообразием в  $\mathbb{R}^n$ . Но упомянутое в (2.1.8,1) вложение  $M$  в  $\mathbb{R}^{2m+1}$  таково, что  $M$  — подмногообразие в  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .
3. Мы получили подмногообразия в  $\mathbb{R}^n$ , потребовав, чтобы функции  $f_i(x) = 0, f_i \in C^\infty$  и  $Df_i$  были линейно независимы. Определения неявно подразумевают, что такие функции  $f$  (по крайней мере локально) существуют.
4. Можно доказать следующее утверждение: если  $Y$  — подмногообразие в  $X, Z$  — подмногообразие в  $Y$ , то  $Z$  является подмногообразием в  $Y$  только в том случае, когда  $Z$  — подмногообразие в  $X$  [1, гл. 16, 8.7].

Теперь мы уже в состоянии обобщить понятие дифференцируемого отображения открытых множеств в  $\mathbb{R}^n$  на многообразия. Поступим так, как это принято в физике: назовем некий объект дифференцируемым, если он дифференцируем в локальных координатах.

### Определение (2.1.12)

**Отображение  $f : M_1 \rightarrow M_2$  называется  $p$  раз дифференцируемым, если для всех карт одного атласа многообразия  $M_1$  и всех карт одного атласа многообразия  $M_2$  очевидное ограничение  $\Phi_2 \circ f \circ \Phi_1^{-1}$  есть  $p$  раз дифференцируемое отображение из  $\Phi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \subset \mathbb{R}^{m_1}$  в  $\mathbb{R}^{m_2}$  (рис. 2.3).**

### Примеры (2.1.13)

1. Если  $M_1$  — подмногообразие многообразия  $M_2$ , то естественное инъективное отображение бесконечно дифференцируемо, потому что проекция в  $\mathbb{R}^n$  бесконечно дифференцируема (ср. (2.1.9)).
2. Если обозначить через  $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$  многообразие вещественных матриц размерности  $(n \times n)$ , то суммирование и умножение двух таких матриц являются  $C^\infty$ -отображениями  $\text{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ .
3. Композиция  $f_1 \circ f_2 : M_3 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_1} M_1$  вместе с  $f_i$  принадлежит классу  $C^p$  (задача (2.1.25,6)).
4. Если  $M_i$  обладает структурой произведения многообразий  $M_1 \times M_2$  и  $f = f_1 \times f_2$ , то  $f$  вместе с  $f_i$  является  $C^p$ -отображением.



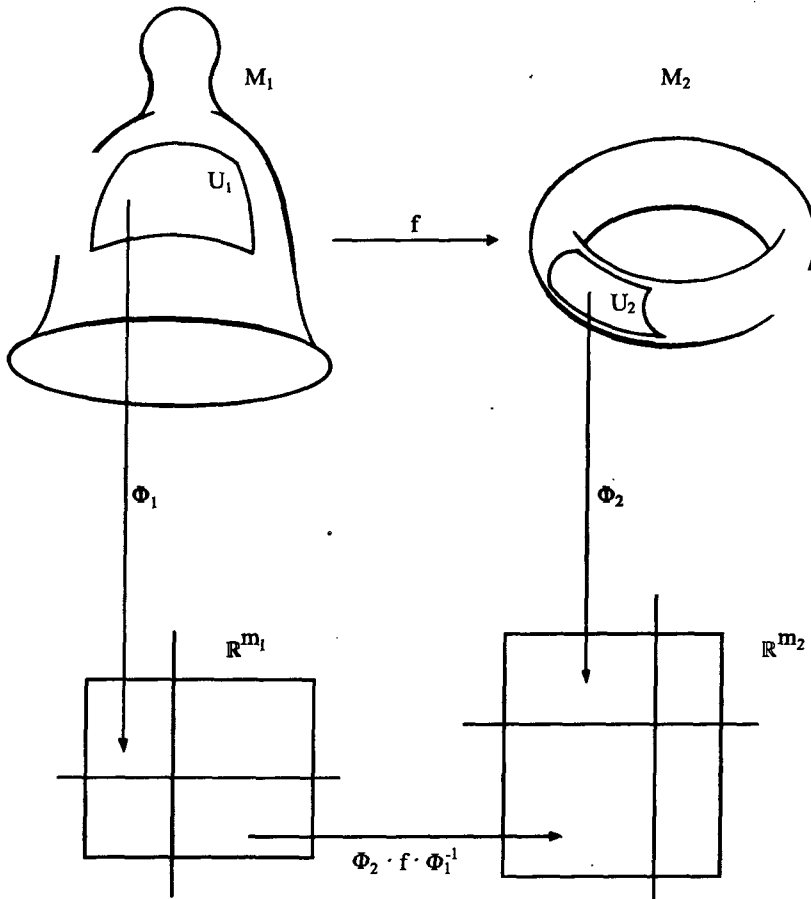


Рис. 2.3. Дифференцируемость отображения многообразий

7.  $M_1 = I \subset \mathbb{R}$ . Если рассматривать  $I$  как временной интервал,  $M_2$  — как пространство, то функция  $f$ , или кривая  $f(I)$ , называется траекторией.
8.  $M_2 = \mathbb{R}$ . В этом случае обозначаем класс  $p$  раз дифференцируемых функций символом  $C^p(M_1)$ . Элементарные правила дифференцирования суммы и произведения показывают, что такие функции образуют алгебру. Если функция  $f$  нигде не обращается в нуль, то  $1/f$  также принадлежит этой алгебре.

#### примечания (2.1.14)

1. В (2.1.12) речь шла только об одном атласе. Условие согласованности свидетельствует о том, что понятие дифференцируемости во всех атласах, принадлежащих одному классу эквивалентности, совпадает. Это означает, что при замене карт дифференцируемое отображение остается дифференцируемым, а недифференцируемое отображение не может стать дифференцируемым (ср. (2.1.10,4)).
2. Если  $N_1$  — подмногообразие в  $M_1$ , то ограничение отображения  $f|_{N_1}$  дифференцируемо, если дифференцируемо  $f$ . На карте (2.1.9) ограничение означает, что последние  $(m-n)$  координат удерживаются постоянными, а это не влияет на дифференцируемость.

Топологическое понятие гомеоморфизма допускает уточнение для многообразий.

**Определение (2.1.15)**

**Диффеоморфизмом**  $f$  двух многообразий называется биективное отображение, если  $f \in C^\infty$  и  $f^{-1} \in C^\infty$ . Многообразия, между которыми существует диффеоморфизм, называются **диффеоморфными**.

**Примеры (2.1.16)**

1. Карта  $(V, \Phi)$  задает диффеоморфизм  $\Phi$  подмногообразия  $V$  на  $\Phi(V) \subset \mathbb{R}^m$ , так как  $\mathbf{1} \in C^\infty$ . Диффеоморфизмы  $\Phi_1(V_1 \cap V_2) \rightarrow \Phi_2(V_1 \cap V_2)$  при замене карт  $(\Phi_1, V_1) \rightarrow (\Phi_2, V_2)$  называются **пассивными преобразованиями**; остальные диффеоморфизмы — **активными**.
2. Топологически  $M_1 = \mathbb{R}$ , но имеет атлас  $(V = \mathbb{R}, \Phi : x \rightarrow x^3)$ , состоящий из одной карты. Как следует из примера (2.1.16,1),  $\Phi$  — диффеоморфизм  $M_1 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}$ .
3.  $\Phi : x \rightarrow x^3$  — не диффеоморфизм  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , так как  $\Phi^{-1} \notin C^\infty$ .
4. Две структуры многообразия, заданные на одном и том же топологическом пространстве  $M$ , тождественны (т.е. заданы эквивалентными атласами) только тогда, когда  $\mathbf{1}$  — диффеоморфизм.

**Примечания (2.1.17)**

1. Примеры (2.1.16) показывают, что над  $\mathbb{R}$  существуют диффеоморфные, но не тождественные структуры многообразий, так как  $M_1 \xrightarrow{\mathbf{1}} \mathbb{R}$  — не диффеоморфизм. При отождествлении диффеоморфных многообразий следует помнить, что они не обязательно являются одним и тем же многообразием в силу своего определения. Если говорим о  $\mathbb{R}^n$  как о многообразии, не указывая никаких подробностей, то подразумевается  $\mathbb{R}^n$  со стандартной картой  $(\mathbb{R}^n, \mathbf{1})$ .
2. На сложных топологических пространствах (и даже на  $\mathbb{R}^4$ ) существуют структуры многообразия, которые не диффеоморфны. Впрочем, они диффеоморфны связным одномерным многообразиям, компактным в  $S^1$  и некомпактным в  $\mathbb{R}$ .

Открытый интервал  $(a, b)$  и  $\mathbb{R}$  можно превратить в диффеоморфные многообразия. Однако при интегрировании по частям следует обратить внимание на то, что  $(a, b)$  обладает граничными точками  $\{a, b\}$ , а  $\mathbb{R}$  граничных точек не имеет. Чтобы подчеркнуть это различие и привлечь большее внимание к граничным точкам, введем несколько более общее понятие **многообразия с краем**. Оно построено по образу и подобию **полупространства** с его границей.

**Определение (2.1.18)**

$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ ,  $\partial\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ . *Отображение  $\Phi$  открытого подмножества  $U \subset \mathbb{R}_+^n$  в  $\mathbb{R}^m$  называется дифференцируемым, если в  $\mathbb{R}^n$  существуют открытое подмножество  $\tilde{U} \supset U$  и дифференцируемое отображение  $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , такие, что  $\tilde{\Phi}|_U = \Phi$  (рис. 2.4).*

**Примечания (2.1.19)**

1. Подмножество  $U$  не обязательно должно быть открытым в  $\mathbb{R}^n$  и может содержать части границы  $\partial\mathbb{R}_+^n$ .
2.  $\mathbb{R}_+^n$  — не подмногообразие в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\partial\mathbb{R}_+^n$  — подмногообразие.

Подобно тому как многообразие состоит из прообразов открытых подмножеств в  $\mathbb{R}^n$ , многообразие с краем состоит из прообразов открытых подмножеств из  $\mathbb{R}_+^n$ . Понятие атласа допускает обобщение на этот случай.

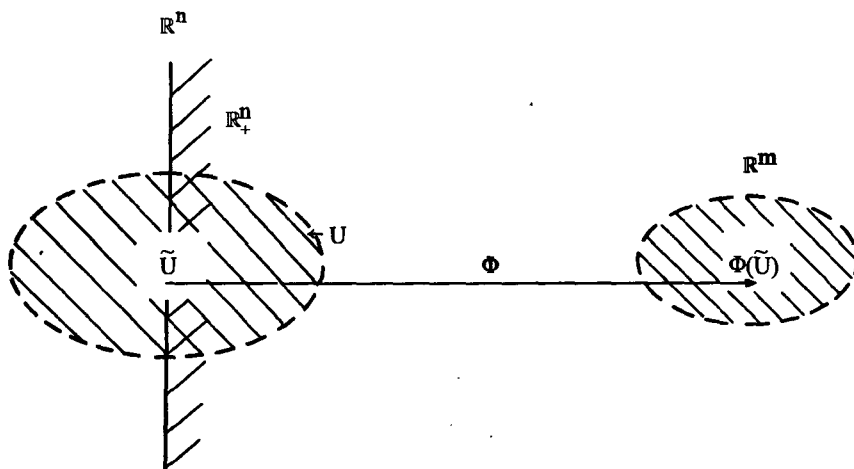


Рис. 2.4. Дифференцируемое отображение пространства  $\mathbb{R}_+^n$ .

**Определение (2.1.20)**

Пусть  $M$  — сепарабельное метризуемое пространство. Структура многообразия с краем определяется заданием открытого покрытия  $U_i$  и гомеоморфизмов  $\Phi_i : U_i \rightarrow$  открытые подмножества в  $\mathbb{R}_+^n$ , причем для всех  $i, j$  согласно (2.1.18) должно выполняться требование

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}|_{\Phi_j(U_i \cap U_j)} \in C^\infty.$$

Край многообразия  $M$  есть  $\partial M = \bigcup_i \Phi_i^{-1}(\Phi_i(U_i) \cap \partial \mathbb{R}_+^n)$  (рис. 2.5).

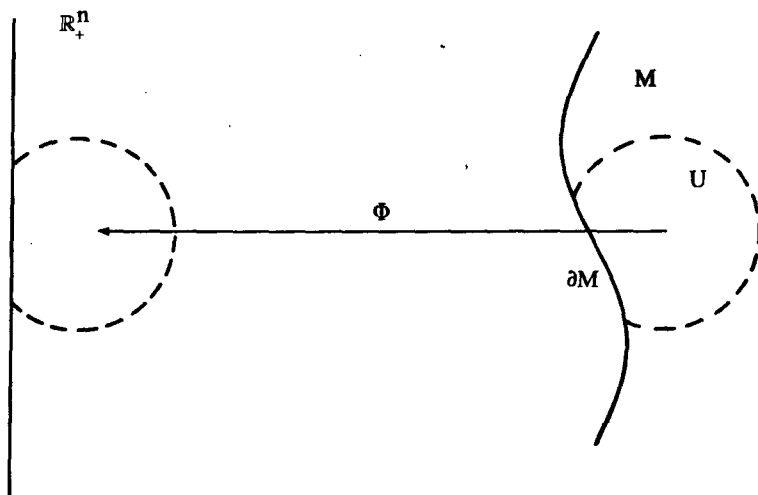


Рис. 2.5. Многообразие с краем

**Примеры (2.1.21)**

1.  $M = [a, b] : U_1 = [a, b), \Phi_1 : x \rightarrow x - a, \partial M = \{a\} \cup \{b\}, U_2 = (a, b], \Phi_2 : x \rightarrow b - x.$
2.  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} : U_1 = \{x_1^2 + x_2^2 < 1\}, \Phi_1 : (x_1, x_2) \rightarrow (x_1 + 1, x_2).$  На  $U_2 = \{1/2 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} = T^1 \times (1/2, 1]$  карты вводятся, как в примере (2.1.21,1) и (2.1.7,2),  $\partial M = T^1.$
3.  $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$  — не многообразие с краем, так как граница (край) имеет углы<sup>2</sup>. **Внутренность  $M$  — многообразие**, а ее край не является многообразием.

**Примечания (2.1.22)**

1. Край  $\partial M$  не следует путать с топологической границей, которая зависит от вложения. Например,  $\partial \mathbb{R}_+^n$  как подпространство пространства  $\mathbb{R}^n$  является своим собственным краем, но  $\mathbb{R}^{n-1}$  края не имеет. В  $\mathbb{R}^n$  множество  $\partial \mathbb{R}_+^n$  является топологической границей полупространства  $\mathbb{R}_+^n.$
2. Чтобы задать многообразие, достаточно системы карт при условии  $M = \bigcup_i U_i.$  Однако такая система ничем не отличается от других, согласованных с ней систем. Структуры, обладающие согласованными атласами, считаются тождественными.
3. Если  $\partial M = \emptyset,$  то приходим к определению (2.1.6). В этом случае говорим просто о многообразии, а не о многообразии с краем.
4. Так как  $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}|_{\Phi_j(U_i \cap U_j)}$  — гомеоморфизмы, они переводят граничные точки полупространства  $\mathbb{R}_+^n$  в граничные же точки и поэтому определяют согласованные атласы границы полупространства.
5. Многообразие с краем должно быть некомпактным (как  $(0,1]$ ); у компактного многообразия (например, как у  $T^1$ ) не может быть края.

Множества  $U_i$  в (2.1.20) одновременно являются картами и для  $M \setminus \partial M,$  поскольку это внутренность для многообразия  $M$  и края  $\partial M.$   $M \setminus \partial M$  и  $\partial M$  отображаются в открытые множества соответственно из  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^{n-1}.$  Нетрудно доказать, что условия согласованности при таком ограничении сохраняются. Так приходим к следующему утверждению.

**Следствие (2.1.23)**

$M \setminus \partial M$  и  $\partial M$  обладают структурой многообразия (без края).

**Примечания (2.1.24)**

1. То, что край не имеет границы, следует из обобщенной теоремы Стокса (см. (2.6.7)).
2. Даже если многообразие  $M$  связно,  $\partial M$  не обязательно связно (так обстоит дело с  $[a, b]$ ). Наоборот,  $\partial M$  может быть связно, а  $M$  — несвязно:  $M = [a, b] \cup (b, c), \partial M = \{a\}.$

**Задачи (2.1.25)**

1. Докажите согласованность карт. Пример (2.1.7,2).
2. Покажите, что  $S^1$  — подмногообразие многообразия  $\mathbb{R}^2$  в смысле (2.1.9).
3. Является ли  $\bigcup_{n=1,2,\dots} \{1/n, \mathbb{R}\}$  подмногообразием многообразия  $\mathbb{R}^2$ ? Сколько карт типа (2.1.9) необходимо?
4. Как сформулировать необходимое и достаточное условие диффеоморфизма двух открытых множеств в  $\mathbb{R}^n$ ?
5. Являются ли сумма и произведение двух матриц  $C^\infty$  отображением  $GL(n) \times GL(n) \rightarrow GL(n)$ ?

<sup>2</sup>О многообразиях с углами см. [19].

6. Покажите, что если  $f_1$  и  $f_2$  принадлежат классу  $C^p$ , то  $f_1 \circ f_2$  также принадлежит классу  $C^p$ .
7. Докажите, что "диагональ"  $\{(q, q') \in M \times M : q = q'\}$  — подмногообразие произведения  $M \times M$  многообразия  $M$  на себя.
8. Пусть  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  с  $Dg \neq 0 \forall x$ , для которых  $g(x) = 0$ . Тогда  $\{x \in \mathbb{R}^m : g(x) \leq 0\}$  — многообразие с краем.
9. Докажите, что  $q \in \partial M \Leftrightarrow \exists$  — карта типа (2.1.20) с  $(V, \Phi)$ ;  $\Phi(q) = \{0\}$ .

## Решения (2.1.26)

1.  $V_1 \cap V_2 = T^1 \setminus (-1, 0) \setminus (0, 1) \xrightarrow{\Phi_2} (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \xrightarrow{\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}} (0, \pi) \cup (-\pi, 0)$  с помощью отображений соответственно  $\varphi \rightarrow \varphi$  и  $\varphi \rightarrow \varphi - 2\pi$  (см. рис. 2.2).

2. Воспользуйтесь четырьмя картами:

$$U_2 = \{(x_1, x_2) \in S^1, -1 < x_1 < 1, x_2 \geq 0\}, \Phi_2 : (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 \mp \sqrt{1 - x_1^2}),$$

$$U_3 = \{(x_1, x_2) \in S^1, -1 < x_2 < 1, x_1 \geq 0\}, \Phi_3 : (x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1 \mp \sqrt{1 - x_2^2}),$$

согласуйте их. Тогда  $x \rightarrow \sqrt{1 - x^2}$  при  $|x| \neq 1$  принадлежит классу  $C^\infty$ .

3. Да. Карт бесконечно много:  $U_n = (1/n - 1/n^2, 1/n + 1/n^2) \times \mathbb{R}$ ,  $\Phi_n : (z, x) \rightarrow (x, z - 1/n)$ .
4. Пусть  $x \rightarrow y(x)$ . Для биективного отображения достаточно, чтобы  $\forall x : y_{i,j} \in C^\infty, \det y_{i,j} \neq 0$  (см. [1, гл. 10, 2.5]).
5. Да, если  $\det(M_1 + M_2) \neq 0$ , то  $M_1 + M_2$  и  $M_1 M_2$  являются ограничением дифференцируемого отображения (2.1.13, 2).
6.  $\Phi_1 \circ f_1 \circ \Phi_2^{-1} \circ \Phi_2 \circ f_2 \circ \Phi_3^{-1} = \Phi_1 \circ f_1 \circ f_2 \circ \Phi_3^{-1}$ .
7. Если ввести на произведении карт  $m_1 \times m_2 \rightarrow (q_1, \dots, q_m, q'_1, \dots, q'_m)$  переменные  $q_k^\pm = q_k \pm q'_k$ , то получится карта типа (2.1.9).
8. На картах, на которых подмногообразие  $g = 0$  пространства  $\mathbb{R}^m$  имеет вид (2.1.9), многообразие с краем  $g \leq 0$  можно представить в виде (2.1.20).
9. Если  $\Phi(q) = \{0\}$ , то согласно (2.1.20)  $q$  — граничная точка. Наоборот, если  $q \in \partial M$ , то на каждой карте  $\Phi(q) = (0, x_2, \dots, x_m)$ . Замена карт  $\Phi \rightarrow \Phi - (0, x_2, \dots, x_m)$  переводит точку  $q$  в начало координат.

## 2.2. Касательное пространство

Гладкую поверхность можно аппроксимировать в точке касательной плоскостью. Обобщением этого представления служит касательное пространство. Производная отображения многообразий действует в касательном пространстве как линейное преобразование.

Механика занимается изучением траекторий частиц. Мы ввели их в (2.1.13,5) как отображения  $u$  интервала  $I \subset \mathbb{R}$  в  $M : t \rightarrow u(t) \in M$ . Теперь мы хотели бы определить вектор скорости  $\dot{u}$ , но это невозможно из-за отсутствия на  $M$  линейной структуры. Однако если  $M$  вложить в  $\mathbb{R}^n$ , то  $\dot{u}$  будет лежать в касательной плоскости и “торчать” из  $M$ . Сопоставим траекториям соответствующие векторы скорости, не прибегая к вложению. На карте  $C = (V \ni q = u(0), \Phi)$  образ  $\Phi \circ u$  траектории в точке  $q$  определяет вектор скорости<sup>3</sup>  $D(\Phi \circ u)|_{t=0} \in \mathbb{R}^m$ . В координатах его компоненты могут быть записаны, как обычно:  $\frac{\partial}{\partial t} x^i(u(t))|_{t=0}$ . И хотя сравнение скоростей в различных точках возможно только относительно карты, утверждение о равенстве двух скоростей в одной точке не зависит от карты. Действительно, предположим, что  $u$  и  $v$  — две траектории  $I \rightarrow M$  и  $D(\Phi_1 \circ u)|_{t=0} = D(\Phi_1 \circ v)|_{t=0}$ . Тогда на второй карте получим

$$D(\Phi_2 \circ u)|_{t=0} = D(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}) \cdot D(\Phi_1 \circ u)|_{t=0} = D(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}) \cdot D(\Phi_1 \circ v)|_{t=0} = D(\Phi_2 \circ v)|_{t=0}.$$

Таким образом, независимо от выбора карты можем разделить проходящие через  $q$  траектории на классы эквивалентности касательных друг к другу траекторий. Каждому классу соответствует вектор, касательный к образу траектории, проходящему через  $\Phi(q)$ , т.е.  $D(\Phi \circ u)|_{t=0} \in \mathbb{R}^m$ . Таким образом, устанавливаем на карте  $C = (V \ni q, \Phi)$  биективное отображение  $\Theta_C(q)$  между классами траекторий и векторами в  $\mathbb{R}^m$ .

**Определение (2.2.1)**

**Отображение  $\Theta_C(q)$  переводит траекторию  $u$ , проходящую через точку  $q$ , в вектор**

$$u \xrightarrow{\Theta_C(q)} D(\Phi \circ u)|_{t=0} \in \mathbb{R}^m.$$

**Наоборот,  $\forall v \in \mathbb{R}^m$  существует траектория соответствующего класса ( $0 \in I \subset \mathbb{R}$ ):**

$$v \xrightarrow{\Theta_C^{-1}(q)} u := [t \in I \rightarrow \Phi^{-1}(\Phi(q) + tv) \in M]. \quad (2.2.2)$$

**Примечания (2.2.3)**

1. Отображение  $\Theta_C(q)$  ставит в соответствие различным траекториям одного класса один и тот же вектор, но на различных картах одному и тому же классу соответствуют другие векторы (рис. 2.6).
2. Можно было бы думать, что касательный вектор в направлении кривой  $u$  можно определить просто как  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(u(1/n) - u(0))$  и тем самым избежать столь абстрактной умственной акробатики. К сожалению, стоящая под знаком предельного перехода разность не имеет смысла ни при каких конечных значениях  $n$ .
3. Отображение  $\Theta_C(q)$  наделяет классы эквивалентности структурой векторного пространства. Эта структура не зависит от карт, так как при замене карт имеем  $\Theta_{C'}(q)(u) = D(\bar{\Phi} \circ u)|_{t=0} = D(\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1})|_{\Phi(q)} \circ D(\Phi \circ u)|_{t=0}$ , т.е.  $\Theta_C(q)$  умножается на  $D(\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1})|_{\Phi(q)}$ . Но из правила дифференцирования сложной функции для  $D$  следует, что этот множитель как производная биективного отображения есть обратимое линейное преобразование (задача (2.2.27,1)), и таким образом сохраняет структуру векторного пространства.

<sup>3</sup>Матрица размерности  $(m \times 1)$  рассматривается как эквивалент вектору в  $\mathbb{R}^m$ .

Следовательно, биективное отображение  $\Theta$  позволяет сохранить желаемые свойства касательной плоскости, хотя в действительности в отсутствие канонического вложения в  $\mathbb{R}^m$  касательная плоскость не определена.

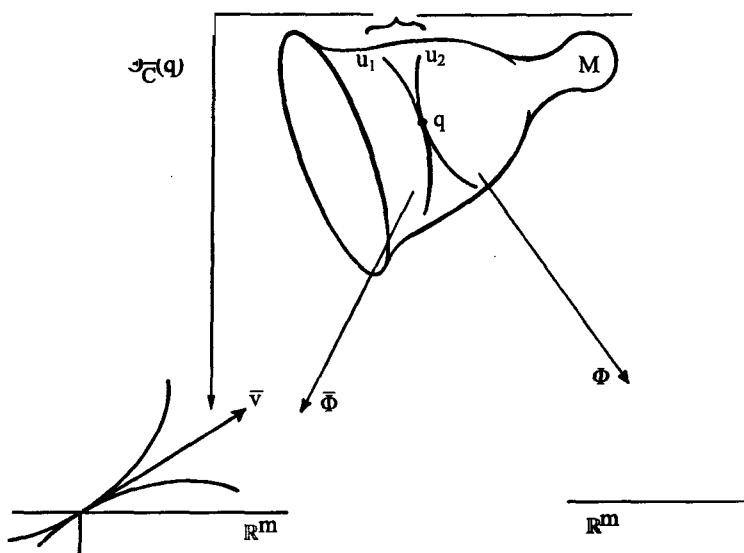


Рис. 2.6. Действие биективного отображения.

#### определение (2.2.4)

Пространство классов кривых, касательных друг к другу в точке  $q$ , называется **касательным пространством** к многообразию  $M$  в точке  $q$  и обозначается  $T_q(M)$ . Оно обладает структурой векторного пространства, если для  $u_1, u_2 \in T_q(M)$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  положить

$$\alpha u_1 + \beta u_2 := \Theta_C^{-1}(q)(\alpha \Theta_C(q)(u_1) + \beta \Theta_C(q)(u_2)),$$

где отображение  $\Theta_C$  задается соотношением (2.2.1). Эта структура не зависит от выбора карт.

#### Примеры (2.2.5)

1.  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi = 1$ . В этом случае  $\Theta_C^{-1}(q)$  ставит в соответствие вектору  $v$  в качестве траектории прямую, проходящую через точку  $q$  параллельно вектору  $v$ . Касательное пространство  $T_q(M)$  может быть естественным образом отождествлено с многообразием  $M$ , если, не вдаваясь в детали, положить  $\Theta = 1^4$ .
2.  $F$  в  $\mathbb{R}^3$  задана с помощью параметризации  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , таким образом  $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ; если воспользоваться  $g^{-1}|_F$  в качестве карты, то координатные линии  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  окажутся поставленными в соответствие координатным осям в  $\mathbb{R}^2$  с помощью  $\Theta_C(q)$ .

#### Примечания (2.2.6)

1. Определение (2.2.4) может показаться абстрактным, но в действительности оно лишь формализует наглядное представление о векторах в касательной плоскости как указателях направления траекторий, проходящих через данную точку. Это делает их элементами пространства  $\mathbb{R}^m$  на картах, используемых для реализации многообразия.

<sup>4</sup>Такая запись претит педантам, но вполне допустима среди друзей.

- Поскольку при замене карт отображение  $\Theta$  умножается на  $D(\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1})$ , то ясно, что последний множитель есть матрица, определяющая, как повернуты относительно друг друга образы траектории  $u$  на различных картах. Это — наглядная основа обычных соотношений между преобразованиями векторов при преобразовании координат. В случае  $\bar{x} \stackrel{\bar{\Phi}}{\leftarrow} q \stackrel{\Phi}{\rightarrow} x$  производная  $D(\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1})$  представляется матрицей  $\partial \bar{x}_i / \partial x_j$ , а вектор касательного пространства преобразуется по закону  $\bar{v}_i = v_j \partial \bar{x}_i / \partial x_j$ . Векторы часто определяют следующим образом: “вектор — это вектор, который преобразуется как вектор”.
- Если в  $M$  не существует выделенной системы координат, то в  $T_q(M)$  также не существует выделенного базиса (и поэтому не существует скалярного произведения). Пространства  $\mathbb{R}^m$  и  $T_q(\mathbb{R}^m)$  могут быть отождествлены только на основании их структуры как векторных пространств, что и будем делать в дальнейшем.
- Если  $N$  — подмногообразие в  $M$ , то  $T_q(N)$  для  $q \in N$  можно идентифицировать как подпространство пространства  $T_q(M)$ .

Согласно (2.1.1) можно рассматривать дифференциал отображения  $\mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$  как линейное преобразование, которое поворачивает траектории в направлении их образов. Такое представление допускает перенос на многообразия, если воспользоваться линейной структурой пространства  $T_q(M)$ : в локальных координатах  $D$  задает линейное преобразование, а  $\Theta$  переносит его на абстрактный образ касательного пространства.

### Определение (2.2.7)

Пусть  $f : M_1 \rightarrow M_2$  — отображение класса  $C^1$ . Дифференциал отображения  $f$  в точке  $q$ , обозначаемый как  $T_q(f)$ , на картах определяется следующим образом:  $T_q(f) = \Theta_{C_2}^{-1}(f(q)) \circ D(\Phi_2 \circ f \circ \Phi_1^{-1}) \circ \Theta_{C_1}(q)$ . Это линейное преобразование  $T_q(M_1) \rightarrow T_{f(q)}(M_2)$  представимо в независимом от выбора карт виде  $T_q(f) \cdot [u] = f \circ [u] = [f \circ u]$ , если классы эквивалентности траекторий  $[u]$  отождествить с векторами (см. задачу (2.2.27,4)).

### Примечания (2.2.8)

- Наглядно несколько громоздкое выражение для действия преобразования  $T_q(f)$  представлено на рис. 2.7:  $T_q(f)$  поворачивает векторы так же, как  $f$  — траектории.
- Хотя определение (2.2.7) содержит ссылку на карту, в действительности оно от карты не зависит, так как преобразование касательных пространств в точности обратное преобразованию  $D(\Phi_2 \circ f \circ \Phi_1^{-1})$ . Например, если заменить в  $M_1$  карту на  $\bar{\Phi}_1$ , то  $D(\Phi_2 \circ f \circ \bar{\Phi}_1^{-1})$  по правилу дифференцирования сложной функции умножается справа на  $D(\bar{\Phi}_1 \circ \Phi_1^{-1})$ , в то время как  $\Theta_{C_1}(q)$  умножается слева на  $D(\bar{\Phi}_1 \circ \Phi_1^{-1})$ , о чем мы уже говорили выше.

### Примеры (2.2.9)

- $M_i = \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\Phi_i = 1$ . Каноническое отождествление касательного пространства означает, что  $\Theta = 1$ ; и, следовательно,  $T_q(f) = D(f)(q)$ . В этом модельном случае возвращаемся к старому определению.
- $M_1 = \mathbb{R} = T_0(M_1)$ ,  $\Phi_1 = \Theta_1 = 1$ . Классы эквивалентности отождествляются со своими векторами. При таком каноническом отождествлении обозначаем базисный вектор в  $T_0(\mathbb{R})$  просто  $1$ . Тогда  $T_0(f) \cdot 1 = \Theta_C^{-1} \circ D(\Phi \circ f)(0) = \Theta_C^{-1} \circ \Theta_C [f] = [f] \in T_{f(0)}(M)$  — вектор, соответствующий классу эквивалентности отображения  $f$ , который представляет собой траекторию, проходящую через  $f(0)$ . На диаграмме это выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & M \\
 \downarrow 1 & \searrow & \text{каноническое отождествление} \\
 T_0(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T_0(f)} & T_{f(0)}(M)
 \end{array}$$



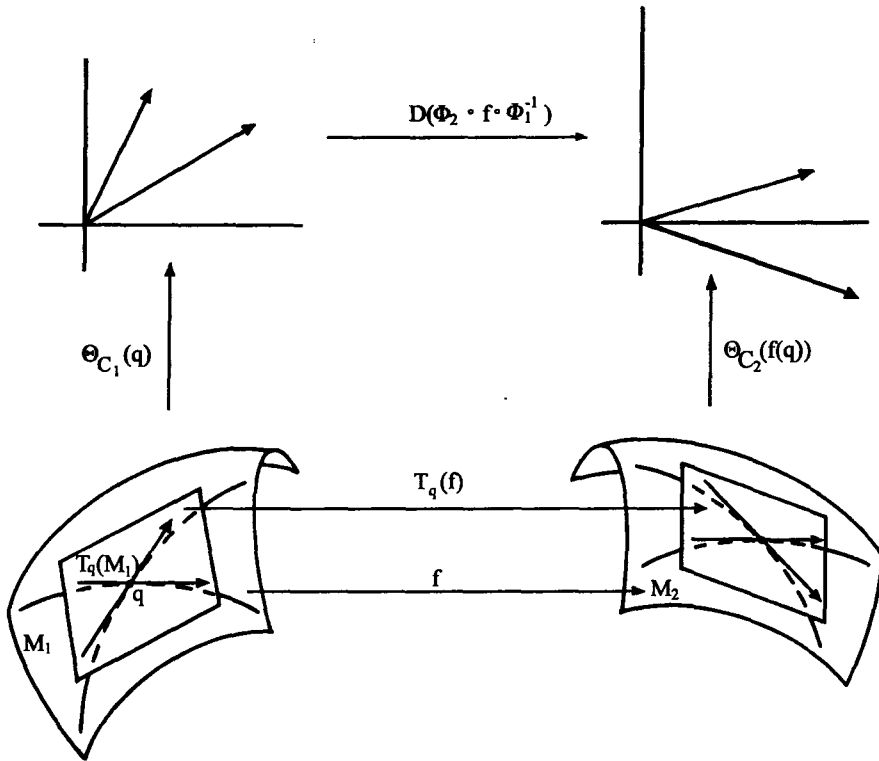
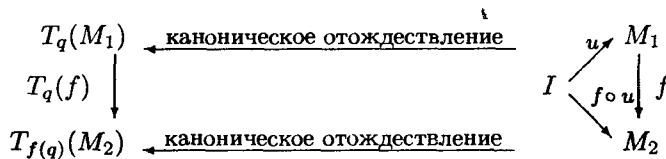


Рис. 2.7. Отображение  $T_q(f)$ .

3. Если  $v \in T_q(M_1)$  задается траекторией  $u$ , то  $T_q(f) \cdot v$  определяется композицией  $f \circ u$  таким образом:  $T_q(f) \cdot v = \Theta_{C_2}^{-1}(f(q))D(\Phi_2 \circ f \circ \Phi_1^{-1})D(\Phi_1 \circ u) = \Theta_{C_2}^{-1}(f(q)) \times D(\Phi_2 \circ f \circ u)$ . Это означает, что  $f$  переводит траекторию  $u$  в  $f \circ u$ , а  $T_q(f)$  преобразует касательные векторы на  $u$  в касательные векторы на  $f \circ u$ . Это утверждение справедливо для всех карт, поэтому  $T_q(f)$  не зависит от выбора карт. Сказанному соответствует следующая диаграмма:



Таким образом, с помощью (2.2.7) выполняется требуемое отображение.

4.  $M_2 = \mathbb{R}$ . В этом случае отображения  $f$  образуют алгебру, и относительно алгебраических операций производная ведет себя, как обычно:  $(f_1 + f_2) \circ \Phi^{-1} = f_1 \circ \Phi^{-1} + f_2 \circ \Phi^{-1}$  и  $(f_1 \cdot f_2) \circ \Phi^{-1} = (f_1 \circ \Phi^{-1}) \cdot (f_2 \circ \Phi^{-1})$ , следовательно:

- а)  $T_q(\text{const}) = 0$ ;
- б)  $T_q(f_1 + f_2) = T_q(f_1) + T_q(f_2)$ ;
- в)  $T_q(f_1 \cdot f_2) = f_1(q) \cdot T_q(f_2) + f_2(q) \cdot T_q(f_1)$ .

5.  $M_1$  — подмногообразие в  $M_2$ ,  $f$  — естественное инъективное отображение. Пользуясь одной картой, убеждаемся в том (задача (2.2.27,6)), что  $T_q(f)$  — инъективное отображение и существует естественное отождествление (2.2.6,4)  $T_q(M_1)$  как подпространства в  $T_q(M_2)$ .

6. В (2.1.13,3) мы пришли к заключению, что композиция двух дифференцируемых отображений также дифференцируема. С помощью правила дифференцирования  $D$  для сложных функций можно проверить, что аналогичное утверждение справедливо и для  $T$  (задача (2.2.27,7)):

$$T_q(f_1 \circ f_2) = T_{f_2(q)}(f_1) \circ T_q(f_2).$$

Эти примеры показывают, что важные правила дифференцирования для многообразий могут быть сформулированы независимо от выбора карт. Чтобы перейти от значения производной в точке к производной как функции от  $q$ , необходимо каким-то образом установить связь между касательными пространствами в различных точках. Пока эти пространства ничем не связаны, никакого **дальнего параллелизма векторов** в различных точках  $q$  не существует. При замене карт конечные области искажаются, и только в бесконечно малом они преобразуются линейно. Правда, в области одной карты  $T(U) := \bigcup_{q \in U} T_q(M)$  можно отождествить с  $U \times \mathbb{R}^m$ , а отображение  $\Theta_C(q)$  продолжить до

$$\Theta_C : T(U) \rightarrow \Phi(U) \times \mathbb{R}^m, \quad (q, u) \rightarrow (\Phi(q), \Theta_C(q) \cdot u). \quad (2.2.10)$$

Это так называемое касательное расслоение над  $U$ . Внутри него касательные векторы в различных точках можно сравнивать с помощью карты. Отображение  $\Theta_C$  биективно, а топологию на  $T(U)$  можно выбрать таким образом, что  $\Theta_C$  станет гомеоморфизмом. Более того,  $\Theta_C$  можно сделать даже диффеоморфизмом, наделив тем самым  $T(U)$  структурой многообразия (размерности  $2m$ ). При этом атлас будет состоять только из одной карты, тогда отпадает необходимость в проверке условий согласованности. Чтобы продолжить касательное расслоение на все  $M$ , его необходимо построить для всех  $U_i$  атласа  $\bigcup_i (U_i, \Phi_i)$  и доказать согласованность карт. Таким образом, будет установлена согласованность произведений топологий на отдельных  $T(U_i) = U_i \times \mathbb{R}^m$ . Далее, имеем

$$\Theta_{\bar{C}}(q) \circ \Theta_C^{-1}(q) : v \rightarrow \left. \frac{d}{dt} \bar{\Phi} \circ \Phi^{-1}(\Phi(q) + vt) \right|_{t=0} = D(\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1}) \cdot v, \quad v \in \mathbb{R}^m,$$

следовательно,

$$\Theta_{\bar{C}} \circ \Theta_C^{-1} : (x, v) \rightarrow (\bar{\Phi}(\Phi^{-1}(x)), D(\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1})(x) \cdot v), \quad (2.2.11)$$

и  $\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1}$  для атласов должно принадлежать классу  $C^\infty$ . Что же касается второго множителя, то он линеен по  $v$  (и следовательно, принадлежит классу  $C^\infty$ ), и поэтому в силу предположения относительно  $\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1}$  принадлежит классу  $C^\infty$  по  $x$ . Это доказывает согласованность и позволяет нам дать следующее определение.

**Определение (2.2.12)**

$T(M) := \bigcup_{q \in M} T_q(M)$  называется **касательным расслоением над  $M$** . Это — многообразие с атласом  $\bigcup_i (U_i \times \mathbb{R}^m, \Theta_{C_i})$ .

**Примеры (2.2.13)**

1.  $M = U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $C = (U, 1)$ ,  $\Theta_C : (x_i, x_i + tv_i) \rightarrow (x_i, v_i)$ , где второй аргумент означает класс эквивалентности, содержащий траекторию  $t \rightarrow x + tv$ .  $T(M) = U \times \mathbb{R}^m$ . Видим, что для открытых множеств евклидова пространства касательное расслоение представляет собой декартово произведение.
2.  $M = S^1$ , карты как в (2.1.7,2),  $\Theta_{C_{1,2}} : (\cos \varphi, \sin \varphi; \cos(\varphi + \omega t), \sin(\varphi + \omega t)) \rightarrow (\varphi, \omega)$ . Обе карты  $C_i$  являются произведениями карт окружности  $S^1$  и тождественной карты пространства  $\mathbb{R}$ . Взятые вместе они задают диффеоморфизм между  $T(S^1)$  и  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Касательное расслоение и на этот раз оказывается произведением.

3.  $M = S^2 = \{x_i \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ ,  $C_{\pm} = \left( S^2 \setminus (0, 0, \pm 1); (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \frac{(x_1, x_2)}{1 \mp x_3} \right)$   
(стереографическая проекция),

$$\Theta_{C_{\pm}} : (x_1, x_2, x_3; x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, x_3(t)) \rightarrow \left( \frac{(x_1, x_2)}{1 \mp x_3}; \frac{(v_1, v_2)}{1 \mp x_3} \mp \frac{(x_1, x_2)}{(1 \mp x_3)^2} \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2}{x_3} \right).$$

Перестановка координат  $x_1$  и  $x_3$  позволяет устранить особенность при  $x_3 = 0$ , но при  $x_3 = \pm 1$  отображения в области перекрытия различны, и продолжить их непрерывно не представляется возможным. Например, при  $x_3 \rightarrow 1$  отображение  $\Theta_{C_-}$  во втором сомножителе переводит левую часть в  $(; (v_1, v_2)/2)$ , т.е. по существу действует как тождественное отображение. Наоборот, отображение  $\Theta_{C_+}$  переводит левую часть в

$$\left( ; \frac{2}{x_1^2 + x_2^2} \left( (v_1, v_2) - 2(x_1, x_2) \frac{(x_1 v_1 + x_2 v_2)}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right),$$

т.е. действует как растяжение в  $1/|x|^2$  раз и последующие отражения относительно  $x := (x_1, x_2)$ . Это отображение сингулярно при  $x = 0$  и не может быть непрерывно переведено в  $\Theta_{C_-}$ . Следовательно, невозможно установить здесь структуру произведения (она противоречила бы (2.6.15,6)); в действительности же  $T(S^2) \neq S^2 \times \mathbb{R}^2$ .

4.  $T(M_1 \times M_2) = T(M_1) \times T(M_2)$  в произведениях карт.

### Примечания (2.2.14)

1.  $T(M)$  сначала задается абстрактно, а не явно как подмногообразие в  $\mathbb{R}^n$ . Однако касательному расслоению можно придать наглядный смысл, если рассматривать его как пространство положений и скоростей частиц.
2. Если  $T_q(M)$  рассматривать как пару  $\{q\} \times \mathbb{R}^m$ , то с чисто теоретико-множественной точки зрения

$$T(M) = \bigcup_{q \in M} \times T_q(M) = \bigcup_{q \in M} (\{q\} \times \mathbb{R}^m) = \left( \bigcup_{q \in M} \{q\} \right) \times \mathbb{R}^m = M \times \mathbb{R}^m$$

всегда есть произведение. Но с помощью  $\Theta_{C_i}$  в касательном пространстве  $T(M)$  можно ввести топологию листа Мебиуса (см. (2.2.16,3)), в результате чего топологически  $T(M)$  не представимо в виде произведения  $T(M) \neq M \times \mathbb{R}^m$ . Но если  $T(M)$  как многообразие диффеоморфно  $M \times \mathbb{R}^m$ , то многообразие  $M$  называется параллелизуемым, поскольку произведение карт позволяет в этом случае определить, что такое параллельность (и даже тождественность) касательных векторов в различных точках. Например, из  $n$ -мерных сфер параллелизуемы только  $S^1$ ,  $S^3$  и  $S^7$ . Локально  $T(M)$  всегда есть произведение многообразий.

3. Многообразие  $M$  может быть отождествлено с подмногообразием в  $T(M)$ , соответствующим точке  $\{0\}$  в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда существует даже глобальная проекция  $\Pi : T(M) \rightarrow M$ ,  $(q, v) \rightarrow q$  на некоторое выделенное подмногообразие. Следует отметить, что в случае прямого произведения отображение  $(q, v) \rightarrow v$  может быть задано канонически, в данном случае — независимо от задания карт.
4.  $T(M)$  в качестве многообразия допускает различные другие карты, но для так называемой карты расслоения, которую мы использовали до сих пор, проекция  $\Pi$  имеет простую форму  $(q, v) \rightarrow q$ . Замена карт многообразия  $M$  индуцирует в  $T(M)$  переход от одной карты расслоения к другой.

В дифференциальной геометрии всегда необходимо различать бесконечно малый, или инфинитезимальный уровень ( $q$ ), локальный уровень ( $U$ ) и глобальный уровень ( $M$ ). Следующее определение позволяет для касательного расслоения абстрагироваться от свойства, заключающегося в том, что структура произведения может быть определена на локальном уровне, и не обязательно на глобальном.

### Определение (2.2.15)

**Векторное расслоение** состоит из многообразия  $X$ , на котором задано сюръективное отображение  $\Pi$  из  $X$  на некоторое подмногообразие  $M$  (**базу**). Кроме того, для всех  $q \in M$  слой  $\Pi^{-1}(q)$  должны иметь структуру векторных пространств, изоморфных некоторому фиксированному векторному пространству  $F$ . На  $X$  должны быть заданы атласы расслоения с областями  $\Pi^{-1}(U_i)$ , где  $U_i$  — окрестности из  $M$ . Соответствующие отображения карт  $\Phi_i$  являются не только диффеоморфизмами на  $U_i \times F$ , но и линейно отображают на  $F$ . Если  $X$  диффеоморфно  $M \times F$ , то  $X$  называется **тривиализуемым** и **тривиально** только в том случае, когда представимо в виде прямого произведения.

### Примеры (2.2.16)

1.  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $M = F = \mathbb{R}$ ,  $\Pi : (x, y) \rightarrow x$ .  $X = M \times F$  тривиально. Несмотря на то что в  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  как многообразии существует много систем координат, структура произведения выделяет прямоугольные координаты.
2.  $X = T(M)$ ,  $F = \mathbb{R}^m$ ,  $\Pi : (q, v) \rightarrow q$ , слой — касательное пространство  $T_q(M)$ , оно тривиализуемо в том случае, когда параллелизуемо.
3.  $X = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  (в теоретико-множественном смысле) с двумя картами  $C_i = (U_i, \Phi_i)$ , определяющими топологию в  $X$ :

$$C_1 : ((0, 2\pi) \times \mathbb{R}, 1),$$

$$C_2 : \left( [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \times \mathbb{R}, (\varphi, x) \rightarrow \begin{cases} (\varphi, x) & \text{для } 0 \leq \varphi < \pi \\ (\varphi - 2\pi, -x) & \text{для } \pi < \varphi < 2\pi \end{cases} \right),$$

$$M = S^1, \quad F = \mathbb{R}, \quad \Pi : (\varphi, x) \rightarrow \varphi.$$

$C_2$  отождествляет  $\varphi \rightarrow 2\pi$  с  $\varphi = 0$ , причем так, что при этом знак переменной  $x$  изменяется на противоположный. В результате такой склейки  $X$  становится (бесконечно широким) листом Мёбиуса (рис. 2.8). Это расслоение не тривиализуемо, так как в противном случае мы имели бы  $\Phi : X \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ , и образ единичного вектора в  $\mathbb{R}$  под действием  $\Phi^{-1}$  при обходе контура  $S^1$  изменял бы знак, что невозможно при непрерывном преобразовании без обращения в нуль в какой-нибудь точке.

Определение (2.2.7) производной в точке может быть распространено на отображение касательного расслоения.

### Определение (2.2.17)

Отображение  $T(M_1) \rightarrow T(M_2) : (q, v) \rightarrow (f(q), T_q(f) \cdot v)$  называется **производной**  $T(f)$  функции  $f : M_1 \rightarrow M_2$ .

### Примечания (2.2.18)

1. Если  $f \in C^r$ , то  $T(f) \in C^{r-1}$ .
2. Если  $f$  — диффеоморфизм, то  $T(f)$  — также диффеоморфизм (см. задачу (2.2.27,1)).

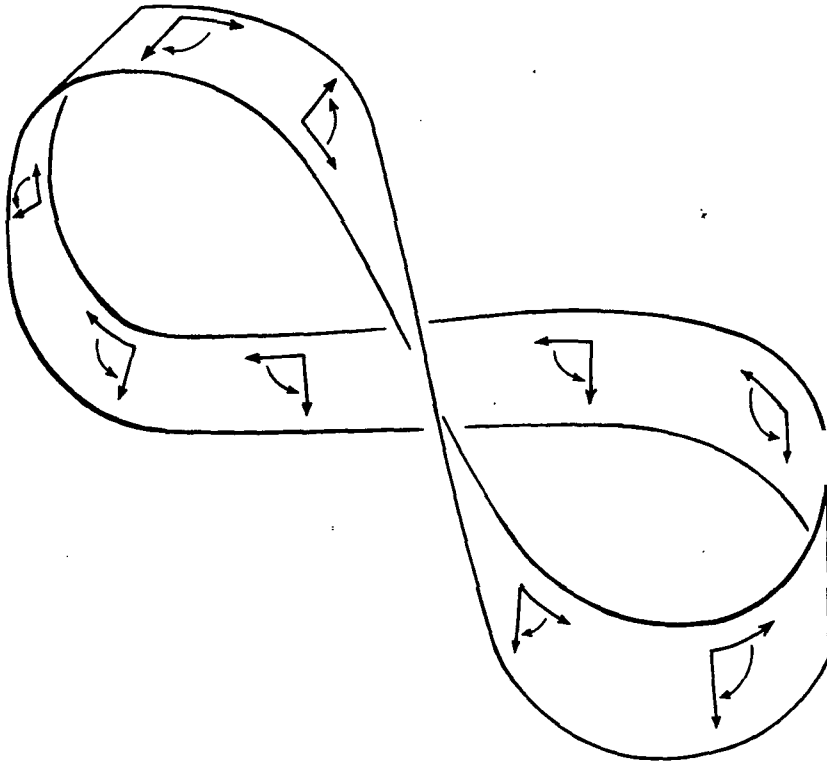


Рис. 2.8. Нетривиализуемое векторное расслоение.

3. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\
 \Pi_1 \uparrow & & \uparrow \Pi_2 \\
 T(M_1) & \xrightarrow{T(f)} & T(M_2)
 \end{array}
 \quad \text{означает} \quad
 \begin{array}{ccc}
 q & \xrightarrow{f} & f(q) \\
 \Pi_1 \uparrow & & \uparrow \Pi_2 \\
 (q, v) & \xrightarrow{T(f)} & (f(q), T_q(f) \cdot v)
 \end{array}$$

и, следовательно, коммутативна.

4. Правило дифференцирования сложной функции (2.2.9,6) допускает теперь более удобную запись  $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$  (см. задачу (2.2.27,7)).
5. В случае прямого произведения все факторизуется, в том числе факторизуется и производная:  $T(f \times g) = T(f) \times T(g)$ .

Структурой многообразия касательного пространства  $T(M)$  определяется, в каких случаях векторы в соседних точках непрерывно переходят друг в друга. Это позволяет ввести следующее определение.

**Определение (2.2.19)**

Если  $C^r$  — отображение  $X : M \rightarrow T(M)$ ,  $r = 1, \dots, \infty$ , такое, что  $\Pi \circ X = 1$ , то  $C^r$  называется векторным  $C^r$ -полем.

Множество векторных полей обозначается  $T_0^1(M)$ .

## Примечания (2.2.20)

1. Условие  $\Pi \circ X = 1$  на карте расслоения касательного пространства  $T(M)$  означает, что  $X : q \rightarrow (q, \mathbf{v}(q))$ ; обычно в явном виде записывается только векторная часть  $\mathbf{v}(q)$ .
2. Расслоение  $T(M)$  тривиализуемо в том и только в том случае, если существует  $m$  линейно независимых векторных  $C^r$ -полей. Если  $e_i, i = 1, \dots, m$ , — поля, то это означает, что  $e_i(q)$  линейно независимы  $\forall q \in M$ . Их можно использовать в качестве базиса и любое векторное поле записывается в виде  $X = X^i e_i$ , где  $X^i \in C^r(M)$ . Локально такой базис существует всегда; например, прообразы единичных векторов из  $\mathbb{R}^m$  под действием  $\Theta_C$ , а глобально — может не существовать; например, на  $S^2$  не существует векторного поля, которое бы нигде не обращалось в нуль (см. (2.6.15,6)).
3. Векторы образуют линейное пространство, векторные поля — модуль, т.е. скалярные множители могут принадлежать  $C^r(M)$ , а не только  $\in \mathbb{R}$ .

Согласно (2.2.18,3) замена карт, как локальный диффеоморфизм, индуцирует соответствующее преобразование векторного поля. В общем случае можно сформулировать следующее определение.

## Определение (2.2.21)

Диффеоморфизм  $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$  индуцирует отображение  $\Phi_* : T_0^1(M_1) \rightarrow T_0^1(M_2)$ , определяемое коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 \\ X \downarrow & & \downarrow \Phi_* X \\ T(M_1) & \xrightarrow{T(\Phi)} & T(M_2) \end{array}$$

$\Phi_* X = T(\Phi) \circ X \circ \Phi^{-1}$ . Это означает, что  $\Phi_*$  поворачивает векторные поля так же, как  $\Phi$  — траектории, определяющие направление.

## Примеры (2.2.22)

1.  $M = \mathbb{R}^m, \Phi : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}, T(\Phi) : (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rightarrow (\mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{u}), X : \mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})), \Phi_* X : \mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$ . При сдвиге вектор остается неизменным, но следует иметь в виду, что речь идет только об одном векторе в одной точке, в новой системе координат вектор имеет другие координаты.
2.  $M = \mathbb{R}^n, \Phi : x_i \rightarrow L_{ik} x_k, T(\Phi) : (x_i, u_j) \rightarrow (L_{ik} x_k, L_{jm} u_m), \Phi_* X : x_i \rightarrow (x_i, L_{ik} v_k(L^{-1} x))$ . При линейных преобразованиях  $v$  преобразуется как  $x$ .
3. В общем случае справедлива следующая диаграмма преобразований:

$$\begin{array}{ccc} q_i & \xrightarrow{\Phi} & \bar{q}_i \\ X \downarrow & & \downarrow \Phi_* X \\ (q_i, v_i(q)) & \xrightarrow{T(\Phi)} & (\bar{q}_i, \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial q_j} v_j(q)) \end{array}$$

<sup>5</sup>  $x_i$  означает  $x_i e_i \in \mathbb{R}^n, \{e_i\}$  — базис в  $\mathbb{R}^n$ . Аналогичное утверждение справедливо и для  $v$ .

**Производная Ли (2.2.23)**

Векторное поле  $X$  переводит функцию  $f \in C^1(M)$  в следующую функцию:

$$L_X(f) := I \circ T(f) \circ X : M \xrightarrow{X} T(M) \xrightarrow{T(f)} T(\mathbb{R}) \xrightarrow{I} \mathbb{R},$$

где  $I$  — проекция на второй сомножитель прямого произведения  $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Если  $X$  принадлежит карте расслоения  $q \rightarrow (q, \mathbf{v}(q))$ , то  $L_X(f)(q) = v^i(q) \partial f / \partial q^i$ , т.е.  $L_X(f)(q)$  — изменение функции  $f$  вдоль направления, определяемого  $X$ . Это так называемая **производная Ли**, которая имеет следующие свойства:

а)  $L_X(f + g) = L_X(f) + L_X(g) \quad \forall f, g \in C(M);$

б)  $L_X(f \cdot g) = f L_X(g) + g L_X(f);$

в)  $L_{\alpha X_1 + \beta X_2}(f) = \alpha L_{X_1}(f) + \beta L_{X_2}(f), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Свойства а) и б) характеризуют векторные поля. Следовательно, на многообразии можно определить направление, задающее скорость изменения  $C^1$ -функций. Так как в основном мы апеллируем к геометрической интуиции, то дальнейшее рассмотрение в этом направлении может увести в сторону от основной темы (см. задачу (2.2.27,8)), поэтому приведем лишь следующую теорему.

**Теорема (2.2.24)**

Отображение  $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , обладающее свойствами

(i)  $L(f + g) = L(f) + L(g);$

(ii)  $L(f \cdot g) = f L(g) + g L(f),$

называется **производной**. Оно однозначно определяет  $C^\infty$  векторное поле  $X$ , так что  $L = L_X$ .

**Примечания (2.2.25)**

1. В механике производная Ли  $L_X$  известна под названием **оператора Лиувилля**, поэтому обозначение ее символом  $L$  вдвойне оправдано.
2. Так как  $L_X$  вычисляется с помощью локальной операции, то для определения  $X$  достаточно знать действие  $L_X$  на  $C_0^\infty$ -функции, т.е. функции класса  $C^\infty$  с компактным носителем.
3. Из коммутативности диаграммы ( $\Phi$  — диффеоморфизм)

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ X \downarrow & & \downarrow \Phi_* X & & \\ T(M_1) & \xrightarrow{T(\Phi)} & T(M_2) & \xrightarrow{T(f)} & T(\mathbb{R}) \end{array}$$

т.е. из того, что  $T(f \circ \Phi) \circ X = T(f) \circ T(\Phi) \circ X = T(f) \circ \Phi_* X \circ \Phi$ , имеем

$$L_X(f \circ \Phi) = (L_{\Phi_* X}(f)) \circ \Phi.$$

Итак, образ векторного поля  $X$  действует на функцию так же, как  $X$  — на ее прообраз. Это утверждение становится очевидным, если  $L_X$  (соответственно  $L_{\Phi_* X}$ ) интерпретировать как изменение вдоль кривой, направленной по  $X$  (соответственно вдоль образа этой кривой).

- Структура модуля  $T_0^1(M)$  переносится на  $L_X$ , если производная Ли действует на  $C^r(M)$ : свойство (2.2.23,в) выполняется даже для  $\alpha, \beta \in C(M)$ .
- Если в свойстве (2.2.23,б) положить  $f = 1$ , то получим  $L_X(1) = 0$ , а в силу свойства (2.2.23,а) отсюда следует, что  $L_X(\text{const}) = 0$ .

### Естественный базис (2.2.26)

Согласно (2.2.5,2) координатная сеть в  $\mathbb{R}^m$  наделяет область карты  $V$  базисом  $T_0^1(V)$ . Он называется **естественным базисом**. Его часто обозначают  $\partial/\partial x_i$  или просто  $\partial_i$  по следующим причинам. Пусть  $e_i$  — базис в  $\mathbb{R}^m$  и  $\Phi: q \rightarrow \sum_i e_i x^i \in \mathbb{R}^m$ . Функции  $g \in C^\infty(M)$  на этой карте соответствует отображение  $g \circ \Phi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Производной Ли вдоль  $e_i$  согласно (2.2.23) является производная  $\partial/\partial x^i$ , таким образом,  $L_{\Theta_C^{-1}e_i}g = \frac{\partial}{\partial x^i}g(q(x))$ .

### Задачи (2.2.27)

- Докажите, что для диффеоморфизма  $\psi$  выполняется равенство  $T(\psi^{-1}) = (T(\psi))^{-1}$ .
- Докажите, что  $\Phi_*X$  (см. (2.2.21)) в естественном базисе карты порождает для векторов обычный закон преобразования (2.2.6,2).
- Запишите  $L_Xg$  в явном виде для какой-нибудь карты.
- Докажите, что (2.2.4) не зависит от выбора карт.
- Докажите, что если  $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \supset N_2$ ,  $T(f)$  — сюръективное отображение,  $N_2$  — подмногообразие многообразия  $M_2$ , то  $f^{-1}(N_2)$  — подмногообразие в  $M_1$ . (Если  $N_2$  состоит из одной точки, то справедливо (2.1.10,3).)
- Докажите, что  $T_q(f)$  инъективно для естественного инъективного отображения в подмногообразия.
- Проверьте правило дифференцирования сложной функции.
- Докажите, что отображение  $L: C^\infty \rightarrow C^\infty$ , обладающее свойствами
  - $L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2)$ ,
  - $L(f_1 \cdot f_2) = L(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot L(f_2)$ ,
 имеет вид  $L(f)(p) = v^i(p) f_{,i}(p)$ .

### Решения (2.2.28)

- Примените правило дифференцирования сложной функции к  $\psi \circ \psi^{-1} = 1$  и воспользуйтесь тем, что  $T(1) = 1$ .
- Пусть  $X: q \rightarrow (q, v^i(q)\partial_i)$ ,  $\Phi: q \rightarrow \bar{q}(q)$ . Тогда  $\Phi_*X: \bar{q} \rightarrow (\bar{q}, v^j(q) \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial q_j} \bar{\partial}_i|_{\bar{q}})$ . Обратите внимание на то, что компоненты  $v^i$  преобразуются, как дифференциалы  $dq_i$  и, следовательно, обратно тому, как преобразуется базис  $\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial \bar{q}_i}$ .
- Пусть  $g: q \rightarrow g(q)$ . Тогда  $L_Xg: q \rightarrow v^i(q) \frac{\partial g(q)}{\partial q_i}$ , если  $X: q \rightarrow (q, v(q))$ .
- $$\begin{aligned} & \Theta_C^{-1}(\alpha \Theta_C(v) + \beta \Theta_C(w)) = \\ & = \Theta_C^{-1}(D(\Phi \circ \bar{\Phi}^{-1}))^{-1}(\alpha D(\Phi \circ \bar{\Phi}^{-1}) \Theta_{\bar{C}}(v) + \beta D(\Phi \circ \bar{\Phi}^{-1}) \Theta_{\bar{C}}(w)) = \\ & = \Theta_C^{-1}(\alpha \Theta_C(v) + \beta \Theta_C(w)). \end{aligned}$$
- Воспользуемся в  $M_2$  картой  $\Phi$  типа (2.1.9). Если  $\Phi \circ f = \sum e_i f_i$ , то  $f^{-1}(N_2) = \{x \in M_1: f_i(x) = 0, i = n_2 + 1, \dots, m_2\}$ , сюръективность отображения  $T(f)$  означает, что  $f_{i,k}, i = 1, \dots, m_2, k = 1, \dots, m_1 \geq m_2$ , имеет максимальный ранг; следовательно,  $f_{i,k}, i = n_2 + 1, \dots, m_2$ , должны быть линейно независимыми векторами, и тогда приходим к ситуации (2.1.10,3).



6. На карте (2.1.9)  $f : (x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$

$$T(f) : m \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\phantom{\begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{matrix}}}^n \\ \begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{matrix} \end{array} \right. T(f)v = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

7. 
$$\begin{aligned} T_q(f_2 \circ f_1) &= \Theta_{C_3}^{-1}(f_2 \circ f_1(q)) \circ D(\Phi_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ \Phi_1^{-1}) \Theta_{C_1}(q) = \\ &= \Theta_{C_3}^{-1}(f_2 \circ f_1(q)) D(\Phi_3 \circ f_2 \circ \Phi_2^{-1}) \Theta_{C_2}(f_1(q)) \Theta_{C_2}^{-1}(f_1(q)) \times \\ &\quad \times D(\Phi_2 \circ f_1 \circ \Phi_1^{-1}) \circ \Theta_{C_1}(q) = T_{f_1(q)}(f_2) \circ T_q(f_1). \end{aligned}$$

8. На карте, которая отображает  $p$  в начало координат, функция  $f$  представима в виде

$$f(x) = f(0) + x_i f_{,i}(0) + \frac{1}{2} x_i x_j f_{,ij}(0) + O(x^3).$$

Из (i), (ii) следует, что  $L(f(0)) = L(\text{const}) = 0$ . Тогда из (ii) заключаем, что  $L(x_i f_{,i}(0)) = L(x_i) f_{,i}(0)$ ,  $L(x_i x_j f_{,ij})/2 = x_i L(x_j) f_{,ij}(0)$ ;  $L(f)(0) = f_{,i} L(x_i)$ ;  $L(x_i)$  задает компоненты векторного поля. Так как  $L(f) \in C^\infty$ , то необходимо, чтобы эти компоненты также принадлежали классу  $C^\infty$ .

### 2.3. Потоки

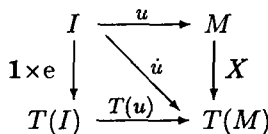
Векторное поле  $X$  задает на основном многообразии  $M$  движение, которое в каждой точке направлено по  $X$ . При определенных обстоятельствах это движение порождает так называемый поток — однопараметрическую группу диффеоморфизмов многообразия  $M$ .

Векторное поле  $X$  надлежит рассматривать как поле направлений: каждой точке кривой  $I$  оно ставит в соответствие вектор из касательного пространства в этой точке. Траектория  $u : I \rightarrow M, t \rightarrow u(t)$  называется **интегральной кривой**  $X$ , если она всюду направлена по  $X$ , или, точнее, если определяемый ею касательный вектор в каждой точке многообразия  $M$  совпадает с вектором, задаваемым полем  $X$ . Наглядно это выглядит следующим образом (рис.2.9). Запишем сказанное аналитически.

Пусть  $e : t \rightarrow (t, 1)$  — поле единичных векторов на  $I$  и  $\dot{u} = T(u) \circ e$ ,

$$\dot{u} = X \circ u. \tag{2.3.1}$$

Тогда получаем следующую коммутативную диаграмму:



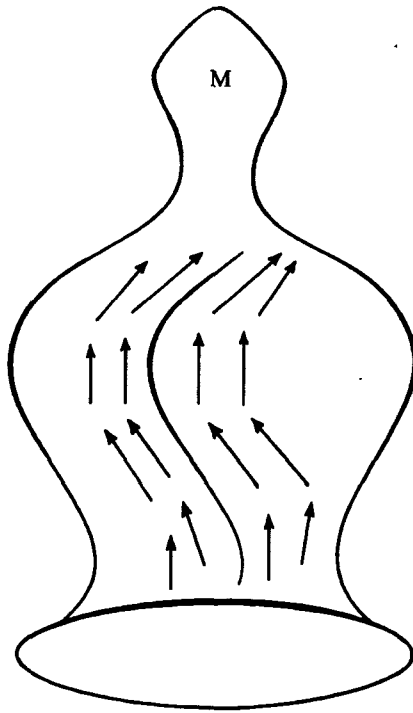


Рис. 2.9. Интегральная кривая векторного поля.

На карте, для которой  $\Phi \circ u : t \rightarrow (u_i(t))$  и  $\Phi_* X : x_i \rightarrow (x_i, X_i(q))$ , это можно записать в более привычном виде

$$\dot{u}_i(t) = X_i(u(t)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.3.2)$$

как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в  $m$ -мерном пространстве.

### Примечания (2.3.3)

1. Если параметр  $t$  согласно обычной физической постановке задач интерпретировать как время, то уравнение (2.3.2) будет описывать движение на  $M$ .
2. Первый порядок не является существенным ограничением, поскольку уравнения более высокого порядка всегда можно свести к первому порядку путем введения новых переменных.
3. Даже то, что в правую часть уравнений (2.3.2) независимая переменная  $t$  входит только неявно, через зависимые переменные, не означает потерю общности, поскольку  $t$  можно причислить к зависимым переменным и ввести новую независимую переменную  $s$ . Далее остановимся на этом подробнее, а пока рассмотрим общие свойства уравнения (2.3.1).

Прежде всего заметим, что непрерывность векторного поля  $X_i(q)$  гарантирует существование, а условие Липшица — единственность локального решения. Следовательно, через каждую точку проходит ровно одна интегральная кривая — интегральные кривые не могут пересекаться. Поскольку рассматриваем только векторные поля класса  $C^\infty$ , для них все эти условия выполнены, и наиболее важные результаты теории дифференциальных уравнений относительно решения при произвольном начальном условии сводятся к следующей теореме.

**Теорема (2.3.4)**

Пусть  $X$  — векторное поле класса  $C^\infty$  на  $M$ . Тогда для всех  $q \in M$  существует  $\eta > 0$ , окрестность  $V$  точки  $q$  и отображение  $\Phi^X : (-\eta, \eta) \times V \rightarrow M, (t, q(0)) \rightarrow \Phi^X(t, q(0)) =: u(t, q)$  такие, что

1.  $\forall q \in V$  отображение  $t \rightarrow u(t, q)$  — интегральная кривая векторного поля  $X$ , проходящая через  $q$ , поэтому  $\dot{u} = X \circ u, u(0, q) = q$ ;
2.  $\forall |t| < \eta$  отображение  $\Phi_t^X : V \rightarrow M, q \rightarrow \Phi_t^X(q) := \Phi^X(t, q)$  — диффеоморфизм окрестности  $V$  на открытое множество в  $M$ .

**Доказательство:** см. [1, 10, 8].

**Примеры (2.3.5)**

1.  $M = \mathbb{R}^n, X : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n; v, 0, \dots, 0). V = \mathbb{R}^n, \eta = \infty, u(t, x(0)) : (t, x_i(0)) \rightarrow (x_1(0) + vt, x_2(0), \dots, x_n(0))$ . Таким образом, постоянное векторное поле порождает **линейный** (по времени) поток.
2.  $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0, 0, \dots, 0\}, X : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n; v, 0, \dots, 0), V$  — произвольная окрестность,  $V \not\ni \{0, \dots, 0\}$ , но параметр  $\eta$  равен наименьшему значению  $t$ , при котором  $V + (vt, 0, \dots, 0)$  содержит начало координат. Интегральная кривая  $u(t, x(0))$  — такая же, как в примере (2.3.5,1). Постоянное поле движения может вывести из многообразия  $M$  за время, которое зависит от  $V$  (рис. 2.9а).

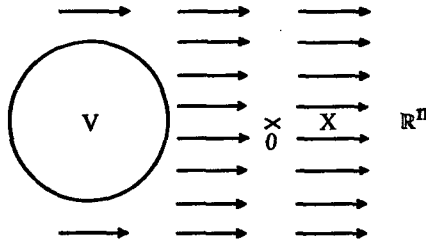


Рис. 2.9а.

3.  $M = \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}, 0, \dots, 0)$ . Следовательно, ось  $x_1$  исключается. Поле  $X$  такое же, как в предыдущих примерах. И снова  $V = M, \eta = \infty$ .
4.  $M = \mathbb{R}, X : x \rightarrow (x, x^3/2)$ , окрестность  $V$  произвольная,  $\eta = \inf_{x \in V} 1/x^2, \Phi^X : (t, x) \rightarrow x(1 - tx^2)^{-1/2}$ . При больших  $x$  векторное поле становится настолько сильным, что любая точка, кроме начала координат, за конечное время оказывается унесенной на бесконечность.

**Примечания (2.3.6)**

1. Теорема (2.3.4) утверждает, что траектории, первоначально близко расположенные, не могут внезапно разойтись. Как увидим в дальнейшем, точки не могут разбегаться быстрее, чем экспоненциально со временем, если производная от  $X$  остается ограниченной в подходящей норме.
2. В примере (2.3.5,1)  $X$  порождает однопараметрическую группу диффеоморфизмов  $\Phi_t^X$  на  $M$ . Поскольку  $u(t_1 + t_2, q) = u(t_2, u(t_1, q))$ , то ее существование эквивалентно тому, что  $V = M, \eta = \infty$ . Это можно показать, например, для  $X$  с компактным носителем. Интуитивно ясно, что в худшем случае некоторые траектории за конечное время могут выйти из  $M$ . Но если векторное поле  $X$  вне некоторого компактного подмножества в  $M$  равно нулю, то траектории не могут покинуть  $M$  [1, 18.2, 11].

3. В примере (2.3.5,2) не существует диффеоморфизм на всем  $M$ , а в примере (2.3.5,3) нам удалось сохранить группу путем исключения траекторий, проходящих через начало координат. Однако это не всегда возможно: в примере (2.3.5,4) после такой операции от многообразия осталась бы только одна точка.

Все эти возможности охвачены следующим определением.

### Определение (2.3.7)

Если диффеоморфизмы  $\Phi_t^X$  (см. теорему (2.3.4)) образуют однопараметрическую группу биективных отображений  $M \rightarrow M$ , то векторное поле  $X$  называется **полным**, а группа — **поток**. Если соотношение

$$\Phi_{t_1}^X \circ \Phi_{t_2}^X = \Phi_{t_1+t_2}^X$$

выполняется только для достаточно малых окрестностей каждой точки и достаточно малых промежутков времени, то  $\Phi_t^X$  называется **локальным потоком** (локальной группой диффеоморфизмов).

Как упоминалось в § 1.3, мы хотим представить эволюцию во времени как автоморфизм алгебры наблюдаемых. Если в качестве последних выбрать функции класса  $C_0^\infty$  (функции класса  $C^\infty$  с компактным носителем), то при малых временах существует локальный поток векторного поля  $X$  как изоморфизм соответствующих подалгебр:

$$\tau_t^X(f) := f \circ \Phi_t^X, \quad f \in C_0^\infty. \quad (2.3.8)$$

Если  $X$  — полное векторное поле, то  $\tau_t^X$  образуют однопараметрическую группу автоморфизмов

$$\tau_{t_1}^X \circ \tau_{t_2}^X = \tau_{t_1+t_2}^X \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.3.9)$$

В каждом случае отображение  $t \rightarrow \tau_t^X(f)(q)$  при  $t$  из некоторой окрестности нуля (величина окрестности зависит от  $f$ ) дифференцируемо по  $t$ . Как видно на карте (задача (2.3.24,4)), производная по времени есть не что иное, как соответствующая векторному полю  $X$  производная Ли (см. (2.5.7)):

$$\frac{d}{dt} \tau_t^X(f)|_{t=0} = L_X f \quad \forall f \in C_0^\infty. \quad (2.3.10)$$

### Примечания (2.3.11)

1. Таким образом, векторное поле порождает локальный поток, а этот поток согласно (2.3.8) является локальной группой изоморфизмов алгебры наблюдаемых класса  $C_0^\infty$ . Как следует из (2.3.10) и (2.2.24), последняя в свою очередь порождает векторное поле, поэтому три введенных выше понятия можно рассматривать как одно.
2. Если  $M$ ,  $X$  и  $f$  аналитичны, то отображение  $t \rightarrow \tau_t^X(f)|_q$  аналитично по  $t$  в некоторой комплексной окрестности нуля. В этом случае степенной ряд по  $t$  можно записать в виде

$$\tau_t^X(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (L_X)^n f =: e^{tL_X} f.$$

3. Может случиться, что потоки двух векторных полей  $X$  и  $\tilde{X}$  асимптотически сближаются, т.е. для каждой точки  $q \in M$  существует  $p \in M$ , такая, что  $\Phi_t^{\tilde{X}}(q)$  и  $\Phi_t^X(p)$  сходятся друг к другу. Но поскольку потоки сходятся не полностью, требуем, чтобы существовал предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{-t}^X \circ \Phi_t^{\tilde{X}} = \Omega.$$

Предел (поточечный) диффеоморфизмов не обязательно должен быть диффеоморфизмом. Например, пределом отображений  $x \rightarrow x/t$  на  $\mathbb{R}$  при  $t \rightarrow \infty$  служит отображение  $\mathbb{R} \rightarrow \{0\}$ . Но если  $\Omega$  — диффеоморфизм, то из группового свойства следует, что  $\Omega \circ \Phi_\tau^{\tilde{X}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{-t}^X \circ \Phi_{t+\tau}^{\tilde{X}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_\tau^X \circ \Phi_{-t}^X \circ \Phi_t^{\tilde{X}} = \Phi_\tau^X \circ \Omega$  и, таким образом,

$$\Phi_t^X = \Omega \circ \Phi_t^{\tilde{X}} \circ \Omega^{-1} \quad \forall t.$$

Следовательно, порожденные векторными полями  $X$  и  $\tilde{X}$  потоки также должны быть диффеоморфными. Согласно (2.2.25,3) и (2.2.24) производная по времени при  $t = 0$  от  $f \circ \Phi_t^X \circ \Omega = f \circ \Omega \circ \Phi_t^{\tilde{X}}$ ,  $f \in C^\infty$  оказывается равной  $L_{\Omega_*\tilde{X}} = L_X$  или  $\Omega_*\tilde{X} = X$ . Иначе говоря, диффеоморфизм  $\Omega$  переводит векторные поля  $X$  и  $\tilde{X}$  друг в друга. Следовательно, асимптотически совпадающие потоки можно рассматривать как один и тот же поток только в различных координатах.

Тривиальный случай (2.3.5,1) типичен; общий случай может быть сведен к нему в окрестности точки  $q$  с  $X(q) \neq 0$  ( $q$  не является точкой равновесия), если воспользоваться подходящими координатами, т.е. принять линии тока за координатные линии.

### Теорема (2.3.12)

В точке  $q \in M$  с  $X(q) \neq 0$  существует карта  $(W, \Phi)$ , такая, что  $\Phi_*X : (x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_m; 1, 0, \dots, 0)$ . Поэтому  $\Phi^{-1}((x_1 - \tau, x_1 + \tau), x_2, \dots, x_m)$  при малых  $\tau$  — интегральная кривая векторного поля  $X$ .

### Доказательство

Поскольку  $X(q) \neq 0$ , то можно найти карту  $(U_1, \psi)$  с  $\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^m$ , для которой имеем  $\psi_*X(0) = (1, 0, \dots, 0)$ . Так как отображение  $\psi_*X \in T_0^1(\psi(U_1))$  непрерывно, то существует открытая, относительно компактная окрестность нуля  $U_2$ , такая, что в этой окрестности компоненты образа векторного поля  $X$  больше  $1/2$ :  $(\psi_*X)^1(x) > 1/2 \forall x \in U_2$ . Если  $X_0 \in T_0^1(\mathbb{R}^m)$ :  $x \rightarrow (x; 1, 0, \dots, 0)$ , то, задав функцию

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) : f = \begin{cases} 0 & \text{на } CU_2 \\ 1 & \text{на } U \subset U_2 \end{cases}, \quad 0 \in U,$$

где  $U$  — открытое множество,  $0 \leq f(x) \leq 1$ , определим интерполирующее векторное поле:

$$\tilde{X} = f\psi_*X + (1-f)X_0 \in T_0^1(\mathbb{R}^m).$$

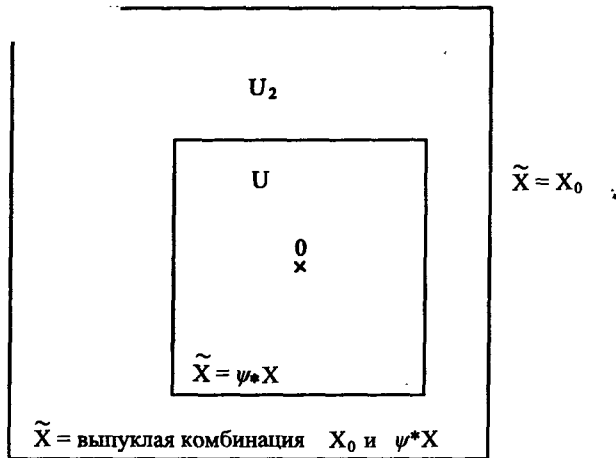
При этом существование функции  $f$  требуемого типа гарантируется хорошо известной теоремой. Ясно, что  $(\tilde{X})^1(x) > 1/2 \forall x \in \mathbb{R}^m$ , и  $\tilde{X}$  порождает поток, так как вне некоторого компактного множества  $\tilde{X}$  совпадает с  $X_0$  (рис.2.10). Следовательно,

$$\Omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{-t}^{X_0} \circ \Phi_t^{\tilde{X}}$$

также существует, поскольку  $(\Phi_t^{\tilde{X}}(x))^1 \geq x^1 + t/2$  и  $\Phi_t^{X_0}$  и  $\Phi_t^{\tilde{X}}$  тождественны на  $\{x \in \mathbb{R}^m : x^1 > \sup_{\tilde{x} \in U_2} \tilde{x}^1\}$ . Если  $\Phi_t^{\tilde{X}}$  при  $t > \tau$  выводит какую-то точку из  $U_2$ , то в этой точке

$$\Phi_{-\tau-t_1}^{X_0} \circ \Phi_{\tau+t_1}^{\tilde{X}} = \Phi_{-\tau}^{X_0} \circ \Phi_{-t_1}^{X_0} \circ \Phi_{t_1}^{\tilde{X}} \circ \Phi_\tau^{\tilde{X}} = \Phi_{-\tau}^{X_0} \circ \Phi_\tau^{\tilde{X}} \quad \forall t_1 > 0.$$

Поэтому на компактных множествах предел достигается через конечный промежуток времени, и  $\Omega$  — диффеоморфизм. Как видно из (2.3.11,3),  $\Omega$  преобразует  $\tilde{X}$  в  $X_0$ , и, кроме того,  $\tilde{X}$  и  $\psi_*X$  совпадают на  $U$ . Композиция  $\Omega \circ \psi$  дает отображение, требуемое в теореме.  $\square$

Рис. 2.10. Интерполирующее векторное поле  $\tilde{X}$ .**ания (2.3.13)**

важная идея доказательства — использование диффеоморфизма сравнения — важную роль в физике. Для прямого доказательства см. задачу (2.3.24,5) и (2.3.10).

Точки  $q$ , в которых  $X(q) = 0$ , удачно называются критическими. Это неподвижные точки потока, и в параграфе 3.4 рассмотрим, что происходит в их окрестностях, более подробно. На первый взгляд кажется, что в окрестности критической точки  $q$  всегда можно найти содержащую  $q$  карту, на которой векторное поле становится линейным относительно расстояния от  $q$ , но в действительности такое возможно лишь при определенных обстоятельствах [20].

Теорема дает в явном виде  $m$  локальных интегралов движения, из которых  $m - 1$  не зависят от времени:  $x_1 - t, x_2, \dots, x_m$ . Однако существенно иметь в виду, что  $x_i$  — локальные функции  $U \rightarrow \mathbb{R}$ . О том, можно ли продолжить их до  $C^r$ -функций  $M \rightarrow \mathbb{R}$ , в теореме ничего не говорится.

**пример (2.3.14)**

$M = T^2 = S^1 \times S^1$ ,  $X : (\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2; \omega_1, \omega_2)$ ,  $\omega_i \in \mathbb{R}$ .  $u : (t, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 + \omega_1 t, \varphi_2 + \omega_2 t)$ . Оба постоянные  $\varphi_1 - \omega_1 t, \varphi_1/\omega_1 - \varphi_2/\omega_2$  не допускают непрерывного продолжения на все  $M$ . Если частоты рационально зависимы, т.е. если  $\omega_i = g_i \omega$ ,  $g_i$  — целые числа, то можно построить глобальную, не зависящую от времени постоянную, такую, как, например,  $\sin(g_2 \varphi_1 - g_1 \varphi_2)$ .

**Примечания (2.3.15)**

1. В дальнейшем докажем, что в случае иррационального отношения частот  $\omega_i$  образ каждой траектории всюду плотен. Поэтому не может существовать постоянная по времени  $C^\infty$ -функция  $K$ , для которой  $T_q(K) \neq 0 \forall q$ : функция  $K = \text{const}$  была бы одномерным подмногообразием, содержащим траекторию, а такое подмногообразие не может быть всюду плотным в  $M$ . Это ясно из определения (2.1.9).
2. Условимся понимать под интегралами движения только  $C^r$ -функции  $K$  ( $r \geq 1$ ), осуществляющие отображение  $M \rightarrow \mathbb{R}$ , такое, что  $L_X K = 0$ . Вопрос о существовании и числе интегралов движения остается пока открытым.
3. Пример (2.3.14) типичен в том отношении, что позволяет доказать для компактных  $M$  [3,25,17] возможность сколь угодно точной аппроксимации произвольного векторного

поля таким, для которого не существуют глобальные интегралы движения. Правда, это обстоятельство представляет физический интерес лишь в том случае, если неточность нашего знания приводит к заметным изменениям решения за физически значимые промежутки времени.

Дифференциальные уравнения теоретической механики (1.1.1)–(1.1.6) имеют несколько более специальный характер: они являются уравнениями Эйлера – Лагранжа некоторой вариационной задачи, и в качестве таковых удовлетворяют условию, согласно которому производная (Фреше)  $DW$  функционала

$$W = \int dt \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t)) \quad (2.3.16)$$

равна нулю. Условие  $DW = 0$  обладает преимуществами формулировки, не зависящей от выбора координат, поскольку не содержит ссылки ни на какую конкретную систему координат. Сейчас не будем подробно останавливаться на этом аспекте проблемы, так как в дальнейшем докажем более общую инвариантность уравнений движения даже относительно канонических преобразований. Пока же нам понадобится лишь элементарный факт, а именно то, что для функции Лагранжа, или лагранжиана,

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t), x(t)) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{|\dot{x}_i|^2}{2} - \sum_{i>j} (e_i e_j - \kappa m_i m_j) |x_i - x_j|^{-1}, \quad (2.3.17)$$

уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.3.18)$$

совпадают с уравнениями движения (1.1.1), (1.1.2). В обобщенных координатах  $q_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, 3N$ , функция Лагранжа  $\mathcal{L}$  представима в виде

$$\mathcal{L} = \sum_{k,i=1}^{3N} m_{ik}(q) \frac{\dot{q}_i \dot{q}_k}{2} - V(q). \quad (2.3.19)$$

Так как  $m_{ik} \forall q$  – невырожденная матрица, то  $\dot{q}_i$  можно выразить через сопряженные импульсы  $p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i = m_{ik}(q) \dot{q}_k$ , и уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (2.3.20)$$

могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2.3.21)$$

где

$$H(q, p) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_{i,k} \frac{p_i p_k}{2} (m^{-1}(q))_{ik} + V(q). \quad (2.3.22)$$

Преобразование Лежандра, связывающее  $\mathcal{L}$  с функцией Гамильтона, или гамильтонианом,  $H$ , обратимо:

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H. \quad (2.3.23)$$

Чтобы понять, какое место занимают эти уравнения в рамках рассмотренных структур, нам понадобится ввести понятие кокасательного расслоения, которое изложим в следующей главе. Не вдаваясь в подробности, можно сказать, что  $\mathcal{L}$  вводит векторное поле в касательном расслоении (координаты  $(q, \dot{q})$ ), а  $H$  — векторное поле в кокасательном расслоении (координаты  $q, p$ ). Последнее называется **фазовым пространством**, а основное многообразие — **конфигурационным пространством**.

### Задачи (2.3.24)

1. Как можно сформулировать уравнение (2.3.1) “инвариантно” (или “ковариантно”)?
2. Рассмотрите интегралы движения одно- и двумерного гармонического осциллятора

$$H_1 = p^2 + \omega^2 q^2, \quad H_2 = p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2.$$

3. То же для  $M = T^2$ ,  $X : (\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2; \omega, \alpha \sin \varphi_1)$ :
4. Выведите соотношение (2.3.10).
5. Используя линии тока потока  $X$  в качестве координатных линий, докажите (2.3.12).
6. Приведите пример векторного поля на  $M = \mathbb{R}$ , которое было бы непрерывно, но не принадлежало классу  $C^1$ , и было бы таким, чтобы уравнение (2.3.1) допускало несколько решений при заданном начальном значении.

### Решения (2.3.25)

1. При диффеоморфизме  $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$  вследствие коммутативности диаграммы (см. (2.2.21))

$$\begin{array}{ccccc} & & M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 \\ & \psi \nearrow & \downarrow X & & \downarrow \Phi_* X \\ I & & & & \\ & \dot{u} \searrow & T(M_1) & \xrightarrow{T(\Phi)} & T(M_2) \end{array}$$

следует,  $\dot{u} = \Phi_* X \circ \bar{u}$ , где  $\bar{u} \equiv \Phi \circ u$ .

2. Решение уравнения движения в общем случае имеет следующий вид:

$$(q_i(t), p_i(t)) = (A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), A_i \omega_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)).$$

Для  $H_1$  постоянная  $A^2 = p^2/\omega^2 + q^2$  определена глобально, а  $\varphi = \arctg q/p - \omega t$  — только локально. Соответственно для  $H_2$  существуют два интеграла  $A_1^2$  и  $A_2^2$ ,  $\varphi_1$  и в этом случае существуют только локально, то же справедливо и относительно третьей, не зависящей от времени постоянной  $\varphi_1/\omega_1 - \varphi_2/\omega_2 = 1/\omega_1 \arctg q_1/p_1 - 1/\omega_2 \arctg q_2/p_2$ . Если  $\omega_i = g_i \omega$ ,  $g_i$  — целое число, то существует глобальная постоянная  $\sin(\varphi_1 g_2 - \varphi_2 g_1)$ .

3. Локально  $\varphi_1 - \omega t$ ,  $\varphi_2 + \frac{\omega}{\omega_2} \cos \varphi_1$  — постоянные. В этом случае существует глобальная, не зависящая от времени, постоянная  $\sin(\varphi_2 + \frac{\omega}{\omega_2} \cos \varphi_1)$ .
4. Пусть  $q(t) := u(t, q)$  — решение уравнения (2.3.1). Тогда

$$\tau_t^X f|_q = f \circ \Phi_t^X|_q = f(q(t)),$$

следовательно,

$$\frac{d}{dt} \tau_t^X f|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial q_i} X_i(q) = L_X f.$$

5. Пусть в обозначениях доказательства теоремы (2.3.12)  $U_1$  — область определения функции  $\psi$  и  $\psi(U_1) =: I_1 \times V_1$ ,  $I_1 \subset \mathbb{R}$ ,  $V_1 \subset \mathbb{R}^{m-1}$ . Теорема (2.3.4) гарантирует существование локального решения  $u(t; x_1, \dots, x_m)$  уравнения  $\psi_* X \circ u = \dot{u}$ , соответствующего этой карте. Функция  $f(t, x_2, \dots, x_m) := u(t, 0, x_2, \dots, x_m) : I_2 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $I_2 \subset I_1$ ,  $V_2 \subset V_1$ , имеет в нуле производную  $Df(0) = 1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , потому что компоненты  $f_i$ , как оказывается, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_0 = X_i(0) = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_0 = \delta_{i2}, \text{ и т.д.}$$



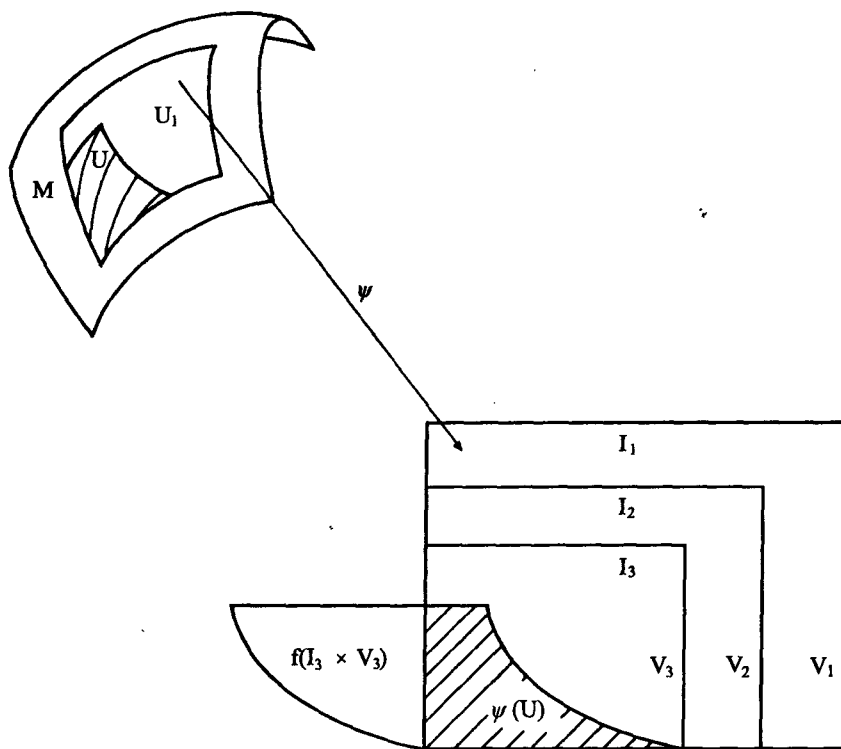


Рис. 2.11. Вложение области

Следовательно, производная  $Df$  обратима в окрестности  $I_3 \times V_3$ , где  $I_3 \subset I_2$ ,  $V_3 \subset V_2$ . Отсюда заключаем, что  $f$  в этой окрестности — диффеоморфизм [1,10.2.5]. Так как

$$f(0, x_2, \dots, x_m) = (0, x_2, \dots, x_m), \quad \psi(U) := I_3 \times V_3 \cap f(I_3 \times V_3) \neq \emptyset,$$

то в качестве новой карты можно ввести  $(U, f^{-1} \circ \psi|_U)$ . Наглядно рассмотренная ситуация представлена на рис. 2.11. На этой карте векторное поле имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_* X &= T(\Phi) \circ X \circ \Phi^{-1} = T(f^{-1}) \circ \psi_* X \circ f = \\ &= T(f^{-1}) \circ \dot{f} = T(f^{-1}) \circ T(f) \circ (1, 0, \dots, 0) = (1, 0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Следовательно,  $I \times \{x\}$  — интегральные кривые.

6.  $X : x \rightarrow (x, \sqrt{x}$  при  $x > 0$ ,  $0$  — в остальных случаях). При  $u(0) = 0$  существуют два решения:  $u(t) = 0$  и  $u(t) = t^2/4$ .

## 2.4. Тензоры

Полилинейная алгебра определяет на векторном пространстве алгебраические структуры. В дифференциальной геометрии эти структуры распространяются с инфинитезимального на локальный и глобальный уровни.

Если  $E$  — (конечномерное) векторное пространство, то пространство линейных отображений  $E \rightarrow \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ) называется сопряженным пространством  $E^*$ . Эти отображения можно записать в виде скалярных произведений: любому  $v^* \in E^*$  соответствует отображение:

$u \rightarrow (v^*|u)$ , такое, что для любого  $\alpha_i \in \mathbb{R}$   $(v^*|\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 (v^*|u_1) + \alpha_2 (v^*|u_2)$ . Если дополнительно постулировать, что  $(\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^*|u) = \alpha_1 (v_1^*|u) + \alpha_2 (v_2^*|u)$ , то  $E^*$  становится линейным пространством. Относительно него известно следующее (задача (2.4.44,1)):

- (i) если  $(v^*|u) = 0 \quad \forall v^* \in E^* \Rightarrow u = 0$ ;
- (ii)  $\dim E^* = \dim E$ ;
- (iii)  $(E^*)^* = E$ ;
- (iv) каждому линейному отображению  $L : E \rightarrow F$  ( $F$  — векторное пространство) биективно соответствует линейное отображение  $L^t : F^* \rightarrow E^*$ , такое, что выполняется равенство  $(L^t v^*|u) = (v^*|Lu) \quad \forall v^* \in F^*, u \in E$ . Отображение  $L^t$  называется сопряженным (с отображением  $L$ ).

### Определение (2.4.1)

Сопряженное пространство  $T_q^*(M)$  касательного пространства  $T_q(M)$  называется кокасательным пространством многообразия  $M$  в точке  $q$ . Элементы пространства  $T_q^*(M)$  называются ковекторами.

### Примечания (2.4.2)

- С помощью ортогонального базиса  $e_i$ ,  $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ , пространство  $\mathbb{R}^m$  можно отождествить с сопряженным ему пространством. Но если этот базис подвергнуть неортогональному биективному преобразованию  $L$ ,  $e_i \rightarrow Le$ , то из сказанного выше вытекает, что сопряженный базис  $e^{*i}$  следует подвергнуть преобразованию  $(L^{-1})$  для выполнения условия ортогональности  $(e^{*i}|e_j) = \delta_{ij}$ . Так как преобразования  $T_q(\Phi)$ , индуцированные диффеоморфизмами  $\Phi$  в  $T_q(M)$ , вообще говоря, не ортогональны, и ни одна система координат не выделена, то утверждение о том, что какой-то вектор в  $T_q^*(\Phi)$  равен какому-то другому вектору  $T_q(M)$ , не может быть сформулировано независимым от выбора карт образом. При замене карт векторы в  $T_q(M)$  и  $T_q^*(M)$  преобразуются по различным законам, и равенство нарушается. Следовательно, если только  $M$  не наделено дополнительной структурой, например римановой метрикой, то необходимо различать  $T_q(M)$  и  $T_q^*(M)$ .
- Совпадение пространства  $T_q^{**}(M)$ , сопряженного с сопряженным пространством  $T_q^*(M)$ , с  $T_q(M)$  не нарушается при замене карт, так как  $((L^{-1})^t)^{-1} = L$ .
- Любой элемент  $v^* \in T_q^*(M)$  задает  $(m-1)$ -мерную гиперплоскость, состоящую из всех  $v$  ортогональных  $v^*$ , поскольку для таких  $(v^*|v) = 0$  скалярное произведение служит мерой длины компоненты вектора, "торчащего" из гиперплоскости. Если  $v$  представить в виде стрелы, а  $v^*$  — как семейство параллельных гиперплоскостей, то  $(v^*|v)$  представляет, сколько из этих гиперплоскостей проткнуты стрелой. Следовательно,  $v^*$  не определяет однозначно разложение  $v = v_{||} + v_{\perp}$ , где  $(v^*|v_{\perp}) = 0$ .

### Примеры (2.4.3)

- В элементарных курсах векторного анализа в качестве примера векторов иногда приводят градиент функции  $f$  в точке  $q$ . Покажем, что градиент принадлежит сопряженному пространству  $T_q^*(M)$ : функция  $f \in C^\infty(M)$  задает отображение  $T_q(f) : T_q(M) \rightarrow T_{f(q)}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , т.е. элемент сопряженного пространства  $T_q^*(M)$ . Обозначим это отображение  $df|_q$  и назовем внешней производной функции  $f$  в точке  $q$ . На карте получаем обычное выражение

$$df|_q(v) = v^i \left. \frac{\partial f}{\partial q^i} \right|_{\Phi(q)} \quad \forall v \in T_q(M).$$

Если вектор из  $T_q(M)$  задан векторным полем  $X$ , то отображение принимает следующий вид:  $df|_q(X(q)) = (L_X f)(q)$ . Таким образом, отображение  $df$  ставит каждому вектору в соответствие изменение функции  $f$  в направлении вектора.

2. Если имеется карта  $C : (U, \Phi)$ ,  $\Phi(q) = \sum e_i q^i \in \mathbb{R}^m$ , то отображение  $\Theta_C^{-1}(q)$  осуществляет перенос базиса  $e_i$  из  $\mathbb{R}^m$  в  $T_q(U)$ . Символически обозначим этот базис как  $\partial/\partial q^i$ . Аналогичным образом  $\Theta_C^t(q)$  преобразует  $e^{*i}$  в базис, сопряженный с базисом  $\partial/\partial q^i$  в  $T_q^*(U)$ . Если  $q^i$  рассматривать как функции из  $C^\infty(M)$ , то, используя обозначения из примера (2.4.3,1), можно записать

$$(dq^i | \Theta_C^{-1}(q) e_j) = dq^i |_q (\Theta_C^{-1}(q) e_j) = L_{\Theta_C^{-1}(q) e_j} q^i = \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_{ij}.$$

Величины  $dq^i$  (внешние производные координат)<sup>6</sup> называются естественным базисом в  $T_q^*(U)$  (см. (2.2.26)). Как видно из примера (2.4.3,1), в естественном базисе компоненты градиента равны  $f_{i,q} := df = f_{i,q} dq^i$ .

Продолжая развивать эти алгебраические соображения, приходим к понятию пространства тензоров в точке. Если  $T_q(M)$  отождествить с  $T_q^{**}(M)$ , то  $T_q(M)$  можно рассматривать как линейное отображение  $T_q^*(M) \rightarrow \mathbb{R}$ . По определению  $r$  раз контравариантный тензор есть отображение

$$\underbrace{T_q^*(M) \times T_q^*(M) \times \dots \times T_q^*(M)}_r \rightarrow \mathbb{R},$$

линейное по каждому из сомножителей. Аналогично контравариантным тензором называется полилинейное отображение  $T_q(M) \times T_q(M) \times \dots \times T_q(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , и приходим к следующему общему определению.

**Определение (2.4.4)**

Тензором,  $r$  раз контравариантным и  $s$  раз ковариантным, называется отображение  $t$  в точке  $q \in M$ :

$$\underbrace{T_q^*(M) \times T_q^*(M) \times \dots \times T_q^*(M)}_r \times \underbrace{T_q(M) \times T_q(M) \times \dots \times T_q(M)}_s \rightarrow \mathbb{R},$$

линейное по каждому из сомножителей.

Запишем это полилинейное отображение в виде скалярного произведения:

$$(v_1^*, \dots, v_r^*; v_1, \dots, v_s) \rightarrow (t|v_1^*, \dots, v_r^*; v_1, \dots, v_s) \in \mathbb{R},$$

где

$$(t|v_1^* + u_1^*, v_2^*, \dots, v_r^*; v_1, \dots, v_s) = (t|v_1^*, v_2^*, \dots, v_r^*; v_1, \dots, v_s) + (t|u_1^*, v_2^*, \dots, v_r^*; v_1, \dots, v_s)$$

■ т.д. Постулируя дополнительно дистрибутивность относительно первого сомножителя

$$(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 | \dots) = \alpha_1 (t_1 | \dots) + \alpha_2 (t_2 | \dots), \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

получим пространство полилинейных отображений, также наделенное линейной структурой. Обозначим это пространство  $T_{q_0}^r(M)$  (кроме того,  $T_{q_0}^1(M) = T_q(M)$ ,  $T_{q_1}^0(M) = T_q^*(M)$ ).

<sup>6</sup>Следуя общепринятому соглашению, вводим в кокасательном пространстве нижние индексы для элементов базиса и верхние — для компонент. В касательном пространстве верхние индексы нумеруют элементы базиса, нижние — компоненты. Это соглашение не относится к координатам, поскольку они не являются элементами базиса.

Чтобы построить базис в этом векторном пространстве, необходимо напомнить некоторые понятия полилинейной алгебры. Поскольку эти понятия относятся к произвольным векторным пространствам, в дальнейшем опускаем  $q$  и  $M$ .

#### Определение (2.4.5)

**Тензорным произведением**  $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_r \otimes u_1^* \otimes u_2^* \otimes \dots \otimes u_s^* \in T_s^r$   $r$  векторов и  $s$  ковекторов называется величина

$$(u_1 \otimes \dots \otimes u_r \otimes u_1^* \otimes \dots \otimes u_s^* | v_1^* \dots v_r^*; v_1 \dots v_s) = \prod_{i=1}^r (v_i^* | u_i) \prod_{j=1}^s (u_j^* | v_j).$$

#### Примечания (2.4.6)

1. Из определения следует дистрибутивность:  $u_1 \otimes (u_2 + u_3) = u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes u_3$ . Это позволяет рассматривать  $\otimes$  как дистрибутивное и ассоциативное отображение из  $T_s^r \times T_{s'}^{r'}$  в  $T_{s+s'}^{r+r'}$ . Произведение  $\otimes$  не коммутативно, поэтому  $\oplus_{r,s} T_s^r$  — алгебра (тензорная алгебра  $T$ ), где  $T_s^r$  — линейные подпространства.
2. Хотя не каждый тензор можно представить в виде произведения векторов, линейные комбинации тензорных произведений векторов, как нетрудно видеть, заполняют все пространство  $T_s^r$ . Если  $e^{*i}$  и  $e_j$  — базисы соответственно в пространствах  $T_1^0$  и  $T_0^1$ , то  $t \in T_s^r$  можно представить в виде

$$t = \sum_{(i),(j)} t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_s} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r},$$

где  $t_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$  — компоненты тензоров. В физике эти величины принято называть тензорами.

3. Как векторное пространство,  $T_s^r$  имеет размерность  $m^{r+s}$ . Обратите внимание на то, что в случае прямого произведения размерность аддитивна, а в случае тензорного произведения — мультипликативна.
4. Вся тензорная алгебра  $T$  бесконечномерна, но с помощью идеалов можно образовать фактор-алгебры.

$$I = \left\{ \sum_i t \otimes t_i \otimes \bar{t} | t_i \in T_1, t, \bar{t} \in T \right\}$$

называется двусторонним идеалом, порожденным подмножеством  $T_1 \subset T$ ; фактор-алгеброй  $T/I$  называется алгебра классов эквивалентности по модулю  $I$ . Сумма и произведение определены на фактор-алгебре естественным путем.

В дальнейшем фактор-алгебра тензорной алгебры по идеалу, порожденному  $u^* \otimes u^*$ , где  $u^* \in T_1^0$ , будет играть особую роль. Построим ее и эквивалентную ей алгебру с помощью следующего определения.

#### Определение (2.4.7)

Для  $p$  ковекторов внешнее произведение  $v_1^* \wedge v_2^* \wedge \dots \wedge v_p^* \in T_p^0$  определяется соотношением  $(v_1^* \wedge v_2^* \wedge \dots \wedge v_p^* | u_1, u_2, \dots, u_p) = \det(v_i^* | u_j)$ .

## Примечания (2.4.8)

1. Связь с  $\otimes$  состоит в том, что для двух ковекторов  $v_1^* \wedge v_2^* = v_1^* \otimes v_2^* - v_2^* \otimes v_1^*$ . В общем случае справедливо равенство

$$t_{i_1 \dots i_p} e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_p} = \frac{1}{p!} t_{i_1 \dots i_p} e^{*i_1} \wedge \dots \wedge e^{*i_p},$$

если  $t_{i_1 \dots i_p}$  — полностью антисимметричный множитель. Последнее замечание означает, что  $t_{P_{i_1 \dots i_p}} = (-)^P t_{i_1 \dots i_p}$  для любой перестановки  $(i_1 \dots i_p) \rightarrow (P_{i_1 \dots i_p})$ , где  $(-)^P$  — сигнатура перестановки.

2. Линейное пространство  $p$  раз ковариантных полностью антисимметричных тензоров обозначим  $\Lambda_p$ . Его элементы имеют вид

$$\sum_{(i)} \frac{1}{p!} e^{*i_1} \wedge \dots \wedge e^{*i_p} \omega_{i_1 \dots i_p},$$

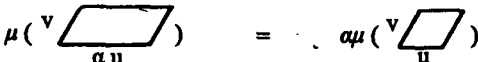
размерность пространства  $\Lambda_p$  равна  $\binom{m}{p}$ . Распространяя ассоциативность и дистрибутивность внешнего умножения  $\wedge$  на все  $\Lambda_p$ , наделяем  $\bigoplus_{p=0}^m \Lambda_p$  структурой градуированной алгебры внешней алгебры (по предположению  $\Lambda_0$  — скаляры), которая является алгеброй Грассмана, так как она порождена  $e^{*i}$ , для которых произведение антикоммумутативно.

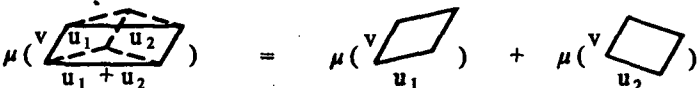
3. Особая роль пространства  $\Lambda_p$  связана с тем, что его элементы служат мерой объемов, натянутых на  $p$  векторов. Разумеется, речь идет не о положительной мере, а о мере, наделенной определенной ориентацией. Относительно ковекторов из  $\Lambda_1$  уже знаем, что они задают длины компонент вектора. В  $\mathbb{R}^n$  скалярное произведение отождествляет  $e^{*i}$  с  $e_i$ ,  $(e^{*1} \wedge e^{*2} | u, v) = u^1 v^2 - u^2 v^1$  есть не что иное, как ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на проекции векторов  $u$  и  $v$  на плоскость 1-2. Обобщение на случай  $p$  векторов, где  $1 \leq p \leq m$ , очевидно.

На общегеометрическом уровне, на котором мы до сих пор пребывали, длины и ортогональность еще не вводятся, и для измерения объемов имеется лишь следующая общая аксиома: для объемов  $\mu(u, v, w, \dots)$ , натянутых на векторы  $u, v, w, \dots$ , должны выполняться следующие соотношения:

- (i)  $\mu(\alpha u, v, w, \dots) = \mu(u, \alpha v, w, \dots) = \dots = \alpha \mu(u, v, w, \dots)$ ;  
 (ii)  $\mu(u_1 + u_2, v, w, \dots) = \mu(u_1, v, w, \dots) + \mu(u_2, v, w, \dots)$ , аналогичное соотношение для  $v = v_1 + v_2$  и т.д.;  
 (iii)  $\mu(u, u, w, \dots) = \mu(u, v, v, \dots) = \dots = 0$ .

Эти требования имеют наглядный геометрический смысл:

(i) 

(ii) 

$$(iii) \quad \mu \left( \begin{array}{c} u = v \\ \diagup \end{array} \right) = 0.$$

С учетом того, что

$$\mu(u, v, w \dots) = (t|u, v, w \dots), \quad t \in \Lambda_p,$$

эти требования эквивалентны следующим: (i) и (ii) задают полилинейную структуру, а (iii) — полную антисимметрию. Последнее эквивалентно изменению знака при перестановке двух аргументов, а требование (iii) сводится к тому, что

$$0 = \mu(u + v, u + v, w \dots) = \mu(u, v, w \dots) + \mu(v, u, w \dots).$$

Образование  $(|): \Lambda_1 \times T_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$  допускает следующее обобщение.

**Определение (2.4.9)**

**Внутреннее произведение**  $(\omega, X) \rightarrow i_X \omega$  отображает  $\Lambda_p \times T_0^1$  в  $\Lambda_{p-1}$ .

Оно линейно по каждому из двух сомножителей и задается соотношениями

$$(i) \quad i_X \omega = (\omega|X) \text{ для } \omega \in \Lambda_1;$$

$$(ii) \quad i_X(\omega \wedge \nu) = (i_X \omega) \wedge \nu + (-)^p \omega \wedge i_X \nu \text{ для } \omega \in \Lambda_p.$$

(Используем соглашение о том, что  $\Lambda_p = 0 \quad \forall p < 0$ , следовательно,  $i_X \omega = 0$ , если  $\omega \in T_0^0$ . Иногда  $i_X \omega$  обозначают  $X|\omega$ .)

Тензор  $g \in T_2^0$  отображает  $(u, v) \in T_0^1 \times T_0^1$  в  $g(u, v) \in \mathbb{R}$ . В компонентной записи это означает, что  $g(u, v) = u^i v^k g_{ik}$ , если

$$u = u^i e_i, \quad v = v^i e_i \quad \text{и} \quad g = e^{*i} \otimes e^{*k} g_{ik}.$$

Если матрица  $g_{ik}$  строго положительна (т.е.  $g_{ik} = g_{ki}$  и все собственные значения  $> 0$ ), то это билинейное отображение записывается в виде  $g(u, v) =: \langle u|v \rangle$ . Оно обладает свойствами скалярного произведения:

$$\langle u|v \rangle = \langle v|u \rangle, \quad \langle v|v \rangle \geq 0, \quad \langle v|v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (2.4.10)$$

Если все собственные значения матрицы  $g_{ik}$  отличны от нуля, но не обязательно положительны, то справедливо лишь более слабое утверждение

$$g(u, v) = 0 \quad \forall v \iff u = 0. \quad (2.4.11)$$

Такое отображение  $g$  называется невырожденным. Сохраним обозначение  $g(u, v) = \langle u|v \rangle$  и в том случае, когда выполняется только (2.4.11); это соотношение гарантирует, что посредством  $\langle v|w \rangle = \langle v^*|w \rangle \quad \forall w$  любому  $v \in T_0^1$  ставится в биективное соответствие  $v^* = e^{*i} g_{ik} v^k$ .

**Примечания (2.4.12)**

1. Помимо сказанного  $g$  наделяет пространство дополнительной структурой, позволяющей отождествлять  $T_0^1$  и  $T_1^0$ . Можем говорить просто о векторе и называть  $v^k$  его **контравариантными** и  $v_i = g_{ik} v^k$  его **ковариантными** компонентами. Учитывая это отождествление, снимаем звездочку с элементов кобазиса и характеризуем их только с помощью индексов:  $u = u^i e_i = u_i e^i$ , где  $e^i g_{ik} = e_k$ , так что  $(e^i)^* = e^{*i}$ , поскольку

$$\delta^i_j = \langle e^i|e_j \rangle = ((e^i)^*|e_j) = (e^{*i}|e_j).$$

- Матрица, обратная матрице  $g$ , обозначается верхними индексами:  $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ . Учитывая это, записываем  $e^i = g^{ij}e_j$ ,  $u^i = g^{ij}u_j$  (поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью  $g^{ik}$  или соответственно,  $g_{ik}$ ).
- Если выполняется соотношение (2.4.10), то  $\langle v|v \rangle^{1/2}$  можно интерпретировать как длину вектора. Правда, ни  $u^i$ , ни  $u_i$  не указывают длину  $i$ -й компоненты вектора  $u$ . Например,  $\langle u^1 e_1 | u^1 e_1 \rangle^{1/2} = |u^1| \sqrt{g_{11}}$ . Столь наглядную интерпретацию имеют только компоненты относительно ортогонального базиса, для которого  $g_{ik} = \delta_{ik}$ .

Отождествление векторов и ковекторов позволяет также переводить друг в друга все  $T_s^r$  с одним и тем же значением  $\sigma := r + s$ , например, биективно отобразить их на  $T_\sigma^0$ :

$$t = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} \otimes e_{i_1} \dots \otimes e_{i_r} = t_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}, \quad (2.4.13)$$

где

$$t_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = t_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_r} g_{i_1 k_1} \dots g_{i_r k_r}.$$

Тем самым можем при заданом  $g$  распространить скалярное произведение  $\langle | \rangle$  на все  $T_s^r$ .

### Скалярное произведение тензоров (2.4.14)

Билинейное отображение  $T_s^r \times T_s^r \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\bar{t}, t) \rightarrow \langle \bar{t} | t \rangle \in \mathbb{R}$ , заданное соотношением

$$\langle \bar{t} | t \rangle = \bar{t}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} t_{n_1 \dots n_s}^{m_1 \dots m_r} g_{i_1 m_1} \dots g_{i_r m_r} g^{j_1 n_1} \dots g^{j_s n_s},$$

называется скалярным произведением тензоров.

### Примечания (2.4.15)

- Если тензор  $g$  положительно определен и  $t \in \Lambda_p$ , то  $\langle t | t \rangle^{1/2}$  задает меру определяемых тензором  $t$   $p$ -мерных объемов.
- Скалярное произведение тензоров допускает следующую интерпретацию:  $T_s^r \times T_s^r$  можно рассматривать как часть тензорного пространства  $T_{r+s}^{r+s}$  и отображать последнее с помощью "свертывания верхних и нижних индексов" в  $\mathbb{R}$ . Аналогично, при  $r \geq s$  можно отображать  $T_s^r$  в  $T_0^{r-s}$ , правда, при этом результат зависит от того, по каким индексам производится свертывание и какие индексы остаются. Если же  $T_s^r$  берется из  $\Lambda_r \times \Lambda_s$ , то результат получается однозначно определенным с точностью до знака вследствие антисимметрии тензоров и служит обоснованием следующего определения.

### Внутреннее произведение в $\Lambda_p$ (2.4.16)

Внутренним произведением в  $\Lambda_p$  называется билинейное отображение  $\Lambda_p \times \Lambda_q \rightarrow \Lambda_{p-q}$ ,  $p \geq q$ ,  $(\omega, \nu) \rightarrow i_\nu \omega$ , задаваемое следующими правилами:

- (i)  $i_\nu \omega = \langle \omega | \nu \rangle$  при  $p = q = 1$ ;
- (ii)  $i_\nu (\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_\nu \omega_1) \wedge \omega_2 + (-)^{p_1} \omega_1 \wedge i_\nu \omega_2$  при  $\nu \in \Lambda_1$ ,  $\omega_i \in \Lambda_{p_i}$ ;
- (iii)  $i_{\nu_1 \wedge \nu_2} = i_{\nu_2} \circ i_{\nu_1}$ .

### Примечания (2.4.17)

1. Чтобы записать  $i$  покомпонентно, введем сокращенное обозначение

$$e^{j_1 \dots j_p} = e^{j_1} \wedge e^{j_2} \wedge \dots \wedge e^{j_p}$$

для базисов в  $\Lambda_p$ . Если

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{j_1 \dots j_p} e^{j_1 \dots j_p}, \quad \nu = \frac{1}{q!} \nu_{k_1 \dots k_q} e^{k_1 \dots k_q},$$

то

$$i_\nu \omega = \frac{1}{(q!)(p-q)!} \nu^{j_1 \dots j_q} \omega_{j_1 \dots j_p} e^{j_{q+1} \dots j_p}.$$

2. Определение (2.4.16) обобщает (2.4.9), если  $T_0^1$  отождествлено с  $\Lambda_1$ .

3. Тензор  $g$  позволяет отождествить пространства  $\Lambda_p$  с сопряженными пространствами. Если внешнее умножение на некоторый  $\nu \in \Lambda_q$  рассматривать как отображение  $\Lambda_p \rightarrow \Lambda_{p+q}$ , то внутреннее умножение на  $\nu$  есть сопряженное (относительно  $\langle \rangle$ ) отображение

$$\langle \nu \wedge \omega | \mu \rangle = i_{\nu \wedge \omega} \mu = i_\omega (i_\nu \mu) = \langle \omega | i_\nu \mu \rangle = \langle (i_\nu)^t \omega | \mu \rangle.$$

4. Если  $p = q$ , то

$$i_\nu \omega = \frac{1}{p!} \langle \omega | \nu \rangle = \frac{1}{p!} \omega^{j_1 \dots j_p} \nu_{j_1 \dots j_p} = i_\omega \nu.$$

В частности, для канонической  $m$ -формы  $\varepsilon := |g|^{+1/2} e^{1 \dots m}$  существует нормировка  $i_\varepsilon \varepsilon = (-)^s$ . Здесь  $g := \det g_{ik}$ ,  $(-)^s = g/|g|$ .

Оба пространства  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_{m-p}$  имеют размерность  $\binom{m}{p}$  и с помощью  $g$ , обладающего свойством (2.4.11), их также можно отождествить.

### Оператор сопряжения (Ходжа) (2.4.18)

Сопряженным отображением, или  $*$ -операцией, называется линейное биективное отображение  $\Lambda_p \xrightarrow{*} \Lambda_{m-p}$ , задаваемое соотношением  $\omega \rightarrow *\omega := i_\omega \varepsilon^7$ .

### Примечания (2.4.19)

1.  $*$  — операция инъективна. Для линейных пространств одинаковой конечной размерности отсюда следует сюръективность.
2. В покомпонентной записи

$$*\omega = \frac{\omega^{j_1 \dots j_p}}{p!(m-p)!} e^{j_{p+1} \dots j_m} \varepsilon_{j_1 \dots j_m}.$$

### Свойства $*$ -отображения (2.4.20):

- (i)  $\varepsilon = *1$ ,  $*\varepsilon = (-)^s$ ;
- (ii)  $* \circ * = (-)^{p(m-p)+s}$ ;
- (iii)  $i_\nu * \omega = *(\omega \wedge \nu)$ ;
- (iv) для  $\nu, \omega \in \Lambda_p$ :  $\nu \wedge * \omega = \varepsilon i_\nu \omega = \omega \wedge * \nu = \varepsilon (-)^s i_{*\nu} * \omega$ .

### Примечания (2.4.21)

- (i) Оба пространства  $\Lambda_0$  и  $\Lambda_m$  одномерны, следовательно, изоморфны  $\mathbb{R}$ ;  $\varepsilon$  — образ числа 1 при  $*$ -отображении.

<sup>7</sup>Так как эта звездочка не имеет ничего общего с встречавшейся нам ранее, она стоит слева от символа.



- (ii) С точностью до знака  $*$ -отображение совпадает с обратным отображением. К сожалению, другое определение знака  $*$ -отображения не позволяет избавиться от знака отображения  $* \circ *$ .
- (iii) Внутреннее произведение является сопряженным по отношению к внешнему.
- (iv) Термин “сопряженность” связан со следующим обстоятельством:  $\Lambda_{m-p}$  можно рассматривать как пространство, сопряженное с  $\Lambda_p$ , если скалярное произведение  $\{, \}$  определить через  $\nu \wedge \omega = \varepsilon\{\nu, \omega\}$ ,  $\nu \in \Lambda_p$ ,  $\omega \in \Lambda_{m-p}$ . Оно связано с  $i$  соотношением  $\{\nu, \omega\} = (-)^{p(m-p)+s} i_\nu * \omega$ .

**Доказательство** свойств  $*$ -отображения (2.4.20):

- (i)  $i_\varepsilon \varepsilon$  нормировано на  $(-)^s$ ;
- (ii) следует из того, что  $\varepsilon_{i_1 \dots i_m} = (-)^{p(m-p)} \varepsilon_{i_{p+1} \dots i_m, i_1 \dots i_p}$  и выполняется условие (i);
- (iii)  $i_\nu * \omega = i_\nu i_\omega \varepsilon = i_{\omega \wedge \nu} \varepsilon$ ;
- (iv) следует из того, что  $i_\nu \omega = i_\omega \nu$  при  $p = q$  и выполняются условия (ii) и (iii).  $\square$

**Пример** (2.4.22)

$m = 3$ ,  $g_{ik} = \delta_{ik}$ . Тогда  $* \circ *$  является 1. Определение  $*$ -отображения базисных векторов в этом частном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} p = 0, 3 & : 1 \overset{*}{\leftrightarrow} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \\ p = 1, 2 & : (dx^1, dx^2, dx^3) \overset{*}{\leftrightarrow} (dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2). \end{aligned}$$

В покомпонентной записи это означает:

$$\begin{aligned} \omega \in \Lambda_0 & : (*\omega)_{ijk} = \omega \varepsilon_{ijk}; \\ \omega \in \Lambda_1 & : (*\omega)_{ij} = \omega_k \varepsilon_{kij}; \\ \omega \in \Lambda_2 & : (*\omega)_i = \frac{1}{2} \omega_{kj} \varepsilon_{kji}; \\ \omega \in \Lambda_3 & : *\omega = \frac{1}{3!} \omega_{ijk} \varepsilon_{ijk}. \end{aligned}$$

В элементарном векторном анализе для трехмерного пространства внешнее произведение обычно заменяется векторным произведением  $*(v \wedge w) = [v \wedge w]$ . Последнее неассоциативно, что и отмечено прямоугольными скобками. Скалярное произведение связано с  $*$  и  $\wedge$  соотношением  $(v \cdot w) = *(v \wedge w)$ . Все приведенные выше конструкции проводились на инфинитезимальном уровне. Попытаемся теперь перенести их на локальный и глобальный уровни. При этом распространение конструкций на область карты не встречает каких-либо трудностей, тогда как глобальное существование  $e_i$ ,  $g$  и  $\varepsilon$ , вообще говоря, проблематично.

В качестве первого шага необходимо собрать тензоры в отдельных точках в расслоении над многообразием  $M$ . Снова видим, что на области  $U$  карта  $C$  многообразия  $M$  с помощью отображения  $(\Theta_C^{-1})^t$  порождает карту кокасательного расслоения

$$T^*(U) = \bigcup_{q \in U} T_q^*(M), \quad (2.4.23)$$

**а именно:**

$$T^*(U) \rightarrow \Phi(U) \times \mathbb{R}^m : (q, v^*) \rightarrow (\Phi(q), (\Theta_C^{-1}(q))^t v^*). \quad (2.4.24)$$

Действительно, из  $\Theta_C(q) : T_q(M) \rightarrow \mathbb{R}^m$  следует

$$(\Theta_C^{-1}(q))^t : T_q^*(M) \rightarrow \mathbb{R}^{m*} \equiv \mathbb{R}^m.$$

Таким образом  $(v^*|u)$  приравнивает скалярному произведению в  $\mathbb{R}^m$  своих представителей  $(\Theta_C^{-1}(q))^t v^*$  и  $\Theta_C(q)u$ .

Как отмечено в (2.2.11), для различных  $U$  эти карты согласованы:  $D(\bar{\Phi} \circ \Phi^{-1})$  просто заменяется  $D(\Phi \circ \bar{\Phi}^{-1})^t$ , отчего требуемая дифференцируемость не нарушается. Структура расслоения непосредственно переносится на тензоры. Отображение

$$\underbrace{\Theta_C(q) \times \Theta_C(q) \times \dots \times \Theta_C(q)}_r \times \underbrace{(\Theta_C^{-1}(q))^t \times (\Theta_C^{-1}(q))^t \times \dots \times (\Theta_C^{-1}(q))^t}_s$$

переводит  $T_{q_s}^r$  в каждой точке  $q \in U$  в  $\mathbb{R}^{m^{r+s}}$ . Это отображение как биективное можно использовать для карт тензорного расслоения, и приходим к следующему общему определению.

#### Определение (2.4.25)

Пусть  $M$  — многообразие с атласом  $\bigcup_i C_i = \bigcup_i (U_i, \Phi_i)$ . Структура векторного расслоения, задаваемая атласом

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i \in U_i} T_q(M)_s^r, (q; u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_r, v_1 \otimes \dots \otimes v_s) \rightarrow \\ & \rightarrow (\Phi_i(q); \Theta_{C_i}(q)u_1 \otimes \dots \otimes \Theta_{C_i}(q)u_r \otimes (\Theta_{C_i}^{-1}(q))^t v_1 \otimes \dots \otimes (\Theta_{C_i}^{-1}(q))^t v_s) \end{aligned}$$

на  $T_s^r(M) = \bigcup_q T_{q_s}^r(M)$  над  $M$ , называется **расслоением  $r$  раз контравариантных и  $s$  раз ковариантных тензоров**.

#### Примечания (2.4.26)

1.  $M$  —  $m$ -мерное линейное топологическое пространство,  $T(M) \equiv T_0^1(M)$ , хотя  $T^*(M) \equiv T_1^0(M)$ .
2. Требуемая в определении (2.2.15) линейная структура есть структура тензоров, проекция  $\Pi : (q, u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s) \rightarrow q$ . Как и для  $T(M)$ , заданная на  $T_s^r(M)$  топология есть произведение топологий  $\varphi(\nu) \times \mathbb{R}^{m^{s+r}}$ .
3. Так как карта линейно отображается в слои, то достаточно указать образы базы. Это достигается в (2.4.25) заданием представителей  $r$  раз контравариантных и  $s$  раз ковариантных векторов.

#### Примеры (2.4.27)

1.  $M = m$ -мерное линейное топологическое пространство:  $T_s^r(M) = M \times \mathbb{R}^{m^{r+s}}$ . Хотя и  $T^*(M)$ , и  $T(M)$  представимы в виде  $M \times \mathbb{R}^m$ , но не отождествляемы, так как нет базиса, который можно было бы считать ортогональным. Если бы  $M = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ , то ортогональный базис существовал бы, так как  $M$  обладало бы дополнительной римановой структурой, с которой нам еще предстоит познакомиться.
2.  $M = S^1$ ,  $T_s^r(M) = M \times \mathbb{R}$ , хотя угол  $\varphi$  из (2.1.7,2) не может быть определен глобально непрерывным образом, базисы  $d\varphi$ ,  $\partial/\partial\varphi$  могут быть определены. И в этом случае каноническое отождествление  $T^*(M)$  и  $T(M)$  не определено: оно соответствовало бы заданию длины дуг на  $S^1$ , но  $S^1$  как многообразие может быть окружностью произвольного радиуса.

3.  $M = S^2 : T_s^r(M)$ , как и  $T(M)$ , не может быть прямым произведением.

Понятие векторного поля допускает непосредственное обобщение.

### Определение (2.4.28)

$C^\infty$ -отображение  $t : M \rightarrow T_s^r(M)$ , для которого  $\Pi \circ t = 1$ , называется  $r$  раз контра- и  $s$  раз ковариантным тензорным полем. Множество всех таких полей обозначим  $T_s^r(M)$ .  $p$ -формами называются  $p$  раз ковариантные полностью антисимметричные векторные поля. Обозначим множество всех  $p$ -форм  $E_p(M)$ ,  $p = 0, 1, \dots, m$ .

### Примечания (2.4.29)

1. Следующие понятия являются синонимами: **векторное поле** и 1 раз контравариантное тензорное поле; **ковариантное векторное поле**, 1 раз ковариантное тензорное поле и **1-форма**; **функция** и **0-форма**.
2. Тензорное поле (см. (2.2.26), (2.4.3,2)) допускает локальное описание в естественном базисе карты

$$\sum_{(i)(j)} c_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dq^{j_1} \otimes \dots \otimes dq^{j_p},$$

где  $c_{(j)}^{(i)} \in C^\infty(M)$ . В физической литературе компоненты  $c_{(j)}^{(i)}$  принято называть **тензорным полем**. Внешняя  $p$ -форма записывается в этом базисе в виде

$$\frac{1}{p!} \sum_{(j)} c_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}.$$

3. Если в  $T_0^1$  и  $T_1^0$  существуют глобальные базисы  $e_i$  и  $e^i$ , то они существуют и во всех  $T_s^r$ . В этом случае многообразие параллелизуемо (см. (2.2.14,2)), искомым диффеоморфизмом  $M \times \mathbb{R}^m \rightarrow T(M)$  служит отображение  $(x, v) \rightarrow (x, e_i(x)v^i)$ . Все расслоения  $T_s^r$  тривиализуемы. Если существует атлас, состоящий лишь из одной карты, то естественные базисы глобально определены. Однако это условие не является необходимым:  $S^1$  также параллелизуемо. Наоборот, на  $S^2$  не существует даже нигде не обращающегося в нуль непрерывное векторное поле.
4. Если на  $M$  существует нигде не обращающаяся в нуль  $m$ -форма, то многообразие  $M$  называется **ориентируемым**. Если  $M$  параллелизуемо, то оно и ориентируемо, так как  $e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^m$  нигде не обращается в нуль. Однако это условие не является необходимым, например,  $S^2$  ориентируемо. С другой стороны, лист Мёбиуса (2.2.16,3) не ориентируем, так как определенную на двух картах 2-форму  $d\varphi \wedge dx$  невозможно непрерывно продолжить на все многообразие. Поскольку каждое многообразие можно наделять римановой структурой (см. (2.4.31) и (2.4.32,2)), такая структура отнюдь не гарантирует ориентируемость. Наоборот, симплектическое пространство (2.4.31) всегда ориентируемо, так как  $m$ -форма

$$\underbrace{g \wedge g \wedge \dots \wedge g}_{m/2} = dq_1 \wedge \dots \wedge dq_m \sqrt{\det g}$$

по предположению нигде не обращается в нуль. С критерием ориентируемости познакомимся в (2.6.15,4).

### Примеры (2.4.30)

1. В (2.4.3) приведен пример ковариантного векторного поля (т.е. **1-формы**) — дифференциал  $df \in T_1^0(M)$ . Таким образом,  $df$  символизирует изменение функции  $f$  в направлении, которое будет определено чуть позже, и отнюдь не является бесконечно малой величиной.

2. Если тензор  $g \in T_2^0(M)$  в каждой точке  $M$  обладает свойством (2.4.11), то изложенная там конструкция может быть распространена на все  $M$  и порождает на  $M$  дополнительную структуру. Для нас важны случаи, когда тензор  $g_{ik}$  либо симметричен, либо антисимметричен и удовлетворяет дифференциальному условию, которое не может быть сформулировано в одной точке. Если условие (2.4.11) выполняется всюду, то векторное поле называется невырожденным.

### Определение (2.4.31)

Если на многообразии  $M$  задано невырожденное симметричное тензорное поле  $g \in T_2^0(M)$ , то  $M$  называется псевдоримановым пространством. Если же тензорное поле  $g$  положительно, то  $M$  называется римановым пространством, а  $g$  — метрикой. Если  $g \in E_2$  невырождено (и поэтому  $m$  четно) и существует естественный базис  $dq_j$ , такой, что

$$g = \sum_{j=1}^{m/2} dq_j \wedge dq_{j+m/2}$$

в том и только в том случае, если  $dq = 0$ , то  $M$  называется симплектическим пространством.

### Примеры (2.4.32)

1. Пространство  $\mathbb{R}^n$  с  $g = \sum_{i,k} dx^i \otimes dx^k g_{ik}$ , где  $g_{ik}$  — постоянная симметрическая матрица с отличными от нуля собственными значениями, становится псевдоевклидовым пространством. С помощью ортогонального преобразования  $x^i \rightarrow m_j^i x^j$  матрица  $g$  приводится к диагональному виду, после чего с помощью растяжения (или сжатия)  $x^i \rightarrow x^i / \sqrt{|g_{ii}|}$  собственные значения можно нормировать к  $g_{ii} = \pm 1$ . Такие карты занимают особое положение, они определены с точностью до псевдоевклидовых преобразований. (При  $n = 4$ ,  $g_{ii} = (-1, 1, 1, 1)$  эти преобразования образуют группу Пуанкаре.) Если все  $g_{ii} = 1$ , то  $\mathbb{R}^n$  становится римановым пространством. На других картах матрица  $g_{ij}$  риманова пространства не должна быть ни диагональной, ни постоянной. Например, в полярных координатах на  $\mathbb{R}^2$  в римановом случае  $g = dr \otimes dr + r^2 d\varphi \otimes d\varphi$ .
2. Если  $N$  — подмногообразие в  $M$  и, следовательно,  $T(N)$  — подмногообразие в  $T(M)$ , то невырожденная матрица  $g \in T_2^0(M)$ ,  $g > 0$ , индуцирует на  $N$  риманову структуру:  $g$  порождает также невырожденное отображение  $T_q(N) \times T_q(N) \rightarrow \mathbb{R}$ . Метрика  $g_{ik} = \delta_{ik}$ , заданная на  $\mathbb{R}^m$ , индуцирует на  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  или  $T^n$  обычную метрику. Так как каждое  $m$ -мерное многообразие можно представить как подмногообразие в  $\mathbb{R}^{2m+1}$ , то риманову структуру можно найти для любого многообразия.
3. Риманова структура пространства  $\mathbb{R}^n$  проявляется в механике через кинетическую энергию. В (2.3.19) кинетическая энергия на карте была записана в виде  $m_{ik}(q) \times \dot{q}_i \dot{q}_k / 2$ . С точностью до множителя отображение  $T(M) \times T(M) \rightarrow \mathbb{R}$  есть метрика. В последней главе обсудим, почему такое понятие длины, введенное из чисто математических соображений, должно совпадать с длиной физически измеряемых расстояний. Упомянувшееся в (2.4.12,1) биективное отображение  $T(M) \rightarrow T^*(M)$ , порожденное метрикой, переводит  $\dot{q}_i$  в  $m_{ik}(q)\dot{q}_k = \partial L / \partial \dot{q}_i$ , т.е. в канонический импульс  $p$ :  $(q, p)$  образует точку в  $T^*(M)$ .
4. Симплектическая структура существует только на многообразиях четной размерности. Как будет показано в § 3.1, пространство  $T^*(M)$  всегда наделено симплектической структурой.

**Примечания (2.4.33)**

1. Будем использовать для соответствующих тензорных полей обозначения (2.4.12)–(2.4.20) для операций в точке (\* – глобально дифференцируемое отображение только в том случае, если многообразие  $M$  ориентируемо):

$$\begin{aligned} \langle \rangle &: T_s^r \times T_s^r \rightarrow C^\infty(M); \\ i &: E_p \times T_1^0 \rightarrow E_{p-1}; \\ \wedge &: E_p \times E_q \rightarrow E_{p+q}; \\ i &: E_p \times E_q \rightarrow E_{p-q}; \\ * &: E_p \rightarrow E_{m-p}. \end{aligned}$$

2. Так как в псевдоримановом пространстве матрица  $g_{ik}$  приводится к диагональному виду, то можно ввести по крайней мере локально **ортогональный базис**  $e^i$ , в котором метрика  $g$  имеет нормальную форму

$$g = e^i \otimes e^k \eta_{ik}, \quad \eta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq k, \\ \pm 1 & \text{для } i = k. \end{cases}$$

В отличие от нормальной формы (2.4.31) симплектической метрики,  $e^i$ , вообще говоря, не образуют естественного базиса.

Диффеоморфизм  $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$  индуцирует другой диффеоморфизм  $T(\Phi) : T(M_1) \rightarrow T(M_2)$ . Мы хотим теперь ввести еще один диффеоморфизм  $T^*(M_1) \rightarrow T^*(M_2)$  таким образом, чтобы скалярное произведение  $\langle \rangle : T^*(M) \overset{\pi}{\times} T(M) \rightarrow M \times \mathbb{R}$  осталось инвариантным<sup>8</sup>, и, следовательно, сопряженный базис переходил в сопряженный базис.

**Преобразование ковекторов (2.4.34)**

Поставим в соответствие диффеоморфизму  $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$  диффеоморфизм  $T^*(\Phi) : T^*(M_1) \rightarrow T^*(M_2)$  так, чтобы следующие диаграммы были коммутативными:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 \\ \Pi_1 \uparrow & & \uparrow \Pi_2 \\ T^*(M_1) & \xrightarrow{T^*(\Phi)} & T^*(M_2) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} M_1 \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\Phi \times 1} & M_2 \times \mathbb{R} \\ \langle \rangle \uparrow & & \uparrow \langle \rangle \\ T^*(M_1) \overset{\pi}{\times} T(M_1) & \xrightarrow{T^*(\Phi)} & T^*(M_2) \overset{\pi}{\times} T(M_2). \end{array}$$

**Примечание (2.4.35)**

Ясно, что в области карты отображение  $T^*(\Phi)$  должно быть отображением  $(q, u) \rightarrow (\Phi(q), (T(\Phi^{-1}))^t(q) \cdot u)$ , поэтому дифференцируемость и единственность очевидны. В дальнейшем будем использовать для краткости обозначение  $T^*(\Phi) = T(\Phi^{-1})^t$  и понимать под  $t$  транспонирование линейного отображения при фиксированной точке  $q$ .

Построив тензорное произведение

$$\underbrace{T(\Phi) \otimes T(\Phi) \otimes \dots \otimes T(\Phi)}_r \otimes \underbrace{T^*(\Phi) \otimes T^*(\Phi) \otimes \dots \otimes T^*(\Phi)}_s,$$

трудно понять, как изменяется  $T_s^r(M)$  под действием диффеоморфизма  $\Phi$ : каждый множитель в произведении

$$\partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dq^{j_1} \otimes \dots \otimes dq^{j_s}$$

<sup>8</sup>Расслоенное произведение  $\overset{\pi}{\times}$  означает, что множители следует брать в одной и той же точке базы.

преобразуется согласно  $T(\Phi)$  и  $T^*(\Phi)$ , и в силу линейности это продолжается на все  $T_s^r(M)$ . Так приходим к закону преобразования векторных полей при диффеоморфизме, в частности при замене карт.

### Определение (2.4.36)

Диффеоморфизм  $\Phi: M_1 \rightarrow M_2$  индуцирует отображение  $\Phi_*: T_s^r(M_1) \rightarrow T_s^r(M_2)$ , определяемое коммутативностью диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M_1 \ni q & \xrightarrow{\Phi} & \Phi(q) \in M_2 \\ t(q) \downarrow & & \downarrow \Phi_* t(\Phi(q)) \\ T_{q_s}^r & \xrightarrow{\overbrace{T_q(\Phi) \otimes \dots \otimes T_q(\Phi)}^r \otimes \overbrace{T_q^*(\Phi) \otimes \dots \otimes T_q^*(\Phi)}^s} & T_{\Phi(q)_s}^r \end{array},$$

где  $t \in T_s^r(M)$  определяется соотношением

$$\Phi_* t = \underbrace{T(\Phi) \otimes \dots \otimes T(\Phi)}_r \otimes \underbrace{T^*(\Phi) \otimes \dots \otimes T^*(\Phi)}_s \circ t \circ \Phi^{-1}.$$

### Примеры (2.4.37)

- $T_0^0: \Phi_* f = f \circ \Phi^{-1}$ . Преобразованная функция принимает в точке такое значение, которое исходная функция принимала в прообразе точки.
- $M = \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $T(\Phi): (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \rightarrow (\mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{v})$ ,  $T(\Phi)$  задано соотношением (2.2.22), и тензор  $t$ , вообще говоря, остается инвариантным при покомпонентном сдвиге:

$$t: \mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x}; t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\mathbf{x}) \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}),$$

$$\Phi_* t: \mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x}; t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}).$$

3.

$$M = \mathbb{R}^n, \quad \Phi: x_i \rightarrow L_{ik} x_k, \quad T^*(\Phi): (x_i; dx^j v_j) \rightarrow (L_{ik} x_k, dx^j L_{kj}^{-1} v_k).$$

Преобразуя  $\partial_i v^i$ ,  $(L^{-1})^t$  необходимо заменить на  $L$ . Тензор  $t$  преобразуется так же, как выше:

$$\Phi_* t: \mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x}; \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} L_{i_1 m_1} \dots L_{i_r m_r} L_{n_1 j_1}^{-1} \dots L_{n_s j_s}^{-1} t_{n_1 \dots n_s}^{m_1 \dots m_r} (L^{-1} \mathbf{x})).$$

- $g \in C^\infty(M_1): \Phi_* dg = d(g \circ \Phi^{-1}) = d(\Phi_* g)$ . Интуитивно ясно, что образ внешней производной функции должен совпадать с внешней производной образа функции. Если вектор  $v$  определяется кривой  $u: I \rightarrow M_1$ , то  $dg$  применительно к  $v$  дает изменение  $g$  вдоль  $u$ . Но это то же самое, что и изменение функции  $g \circ \Phi^{-1}$  вдоль  $\Phi \circ u$ :

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ M_1 & \xrightarrow{\Phi} & M_2 \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \mathbb{R} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ u \quad \Phi \circ u \\ \\ g \quad g \circ \Phi^{-1} = \Phi_* g \end{array}$$

и последняя кривая определяет образ вектора  $v$  под действием преобразования  $T(\Phi)$ .

Резюмируя, можем констатировать следующее.

**Свойства отображения  $\Phi_*$  (2.4.38)**

Образ вектора определяется образами задающих вектор кривых. Образ ковектора таков, что произведение его и образа вектора совпадает с исходным произведением вектора и ковектора. Эти условия задают соотношения между базисами, а также между всеми тензорами, вследствие перестановочности операции  $\Phi_*$  с алгебраическими операциями

$$\Phi_*(t_1 + t_2) = \Phi_*(t_1) + \Phi_*(t_2), \quad \Phi_*(t_1 \otimes t_2) = \Phi_*(t_1) \otimes \Phi_*(t_2).$$

В свою очередь тензорные поля трансформируются в каждой точке так же, как в этой же точке преобразуются векторы. Относительно композиции справедливо соотношение  $(\Phi_1 \circ \Phi_2)_* = \Phi_{1*} \circ \Phi_{2*}$ .

**Примечания (2.4.39)**

1. Так как скалярное произведение  $\langle | \rangle$  представляет собой конструкцию, инвариантную относительно диффеоморфизма  $\Phi$ , то  $\langle | \rangle$  и, более обобщенно, внутреннее произведение  $i$  инвариантно в том, и только в том случае, если  $\Phi$  оставляет инвариантной метрику  $g$ . Диффеоморфизмы, оставляющие инвариантной риманову структуру, называются **изометриями**, а преобразования, оставляющими инвариантными симплектическую структуру, — **каноническими преобразованиями**. В дальнейшем познакомимся подробнее с этими преобразованиями и порождаемыми ими векторными полями — так называемыми **векторными полями Киллинга** и, соответственно, **Гамильтона**.
2. До сих пор мы рассматривали  $\Phi_*$  только как диффеоморфизмы. Если отображение  $\Phi$  небиjectивно, то определить удастся только прообразы ковариантных векторных полей. Даже если  $\Phi$  инъективно, как, например, инъективное отображение  $j$  подмногообразия  $N \rightarrow M \supset N$ ,  $T(j) : T(N) \rightarrow T(M) \supset T(N)$  (см. (2.2.27,6)), то ни образ, ни прообраз векторного поля не были бы заданы (образ не был бы всюду определен, а прообразу недостает в  $T_q(M)$  выделенного, дополнительного к  $T_q(N)$  подпространства, если только не задана метрика на  $M$ ).

**Пример (2.4.40)**

$M = \mathbb{R}^2$  без скалярного произведения,  $N = \mathbb{R}^1$ ,  $j : x \rightarrow (x, 0)$ ,  $T(j) : (x, v) \rightarrow (x, 0; v, 0)$ ,  $X \in T_0^1(M) : (x, y) \rightarrow (x, y; 1, 1)$ . Что могло бы быть  $j_*^{-1}X$  (прообразом  $X$  относительно  $j$ )? Отображение  $Y \in T_0^1(N) : x \rightarrow (x, 1)$  могло бы задать компоненты  $X|_N$  в  $T(N)$ , но в базисе  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (1, 1)$ , в котором  $(v_1, v_2)$  означает вектор  $v_1e_1 + v_2e_2$ ;  $j$  по-прежнему означает отображение  $x \rightarrow (x, 0)$ , но  $X : (x, y; 0, 1)$  имеет в  $T(N)$  компоненту 0. Взглянув на рис.2.12, нетрудно заметить, что прообраз  $j_*^{-1}X = X|_N$  однозначно не определен.

Прообраз  $X$  относительно  $j$  был бы ограничением  $X|_N$ , а оно не определено, если только векторное поле  $X$  на  $N$  не принимает значения, принадлежащие  $T(N)$ . В случае ковариантных тензоров этой трудности не возникает, поскольку ковариантные тензоры определены как полилинейные отображения векторного поля  $T(M)$ . Их ограничение представляет собой не что иное, как отображение векторов из  $T(N) \subset T(M)$ . Прообраз ковариантных полей согласно (2.4.36) позволяет всегда сформулировать следующее определение.

**Определение (2.4.41)**

Пусть  $N \xrightarrow{\Phi} M$  — дифференцируемое отображение двух многообразий. Прообраз ковариантных тензорных полей  $\Phi^* : T_s^0(M) \rightarrow T_s^0(N)$  определяется соотношением

$$\Phi^* X = (T(\Phi))^t \circ X \circ \Phi,$$

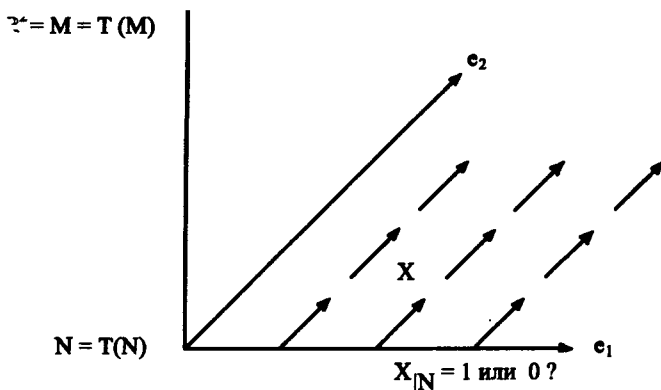


Рис. 2.12. Ограничение векторного поля

т.е. коммутативностью диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow{\Phi} & M \\
 \Phi^* X \downarrow & & \downarrow X \\
 T^*(N) & \xleftarrow{T(\Phi)^t} & T^*(M)
 \end{array}$$

в англоязычной литературе прообраз  $\Phi^*$  называется “pullback” (обратное действие, или действие назад). Для диффеоморфизмов имеем  $\Phi^* = (\Phi^{-1})_*$ .

**Замечание (2.4.42)**

Прообраз  $\Phi^*t$  ковариантного векторного поля  $t$  действует на векторы так же, как  $t$  действует на их образы относительно  $T(\Phi)$ :

$$\Phi^*t(v_1, \dots, v_s) = t(T(\Phi)v_1, \dots, T(\Phi)v_s).$$

**Примеры (2.4.43)**

Вернемся к (2.4.40) и интерпретируем заданные в начале этой главы векторные поля как  $X \in T_1^0(M)$ ,  $Y \in T_1^0(N)$ . На этот раз  $(Y(q)|v) = (X(q)|T_q(j)v) \quad \forall v \in T_q(N)$ . Если координаты претерпевают линейное преобразование с матрицей

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то  $X$  преобразуется с матрицей

$$(L^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и  $X$  переходит в  $(x, y) \rightarrow (x, y, 1, 2)$ , т.е. компоненты в направлении  $T(N)$  остаются неизменными.

Если  $t = dg \in T_1^0(M)$ , то согласно (2.4.37,4)  $\Phi^*dg = d(g \circ \Phi)$ ,  $\Phi$  не должно быть ни инъективным, ни сюръективным.



## Задачи (2.4.44)

1. Докажите, что введенный в начале главы переход  $L \rightarrow L^t$  биективен.
2. Докажите, что отображение  $E_p \xrightarrow{*} E_{n-p}$  биективно.
3. Вычислите в локальных координатах явный вид  $\Phi_*\omega$ ,  $\omega \in T_1^0$ . Как он соответствует элементарному преобразованию дифференциалов координат (или градиентов)?
4. Вычислите компоненты градиента  $df$  в сферических и цилиндрических координатах в  $\mathbb{R}^3$ .
5. Докажите, что  $T^*(M_1 \times M_2) = T^*(M_1) \times T^*(M_2)$ .
6. Докажите, что
  - а)  $(i_X\omega|X_1, \dots, X_{p-1}) = p(\omega|X, X_1, \dots, X_{p-1})$ ,  $\omega \in E_p(M)$ ;
  - б)  $i_{fX}\omega = f i_X\omega$ ,  $f \in E_0(M)$ ,  $\omega \in E_p(M)$ ;
  - в)  $i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$ .

7. Выведите закон преобразования  $m$ -форм в  $m$ -мерном пространстве.

## Решения (2.4.45)

1.  $v \rightarrow (w^*|Lv)$  — линейный функционал над  $E$ , что позволяет записать  $(L^t w^*|v)$ , где  $L^t$  — линейное отображение  $F^* \rightarrow E^*$ . Соответствие  $L \rightarrow L^t$  инъективно, так как

$$\begin{aligned} (w^*|Lv) &= (L_1^t w^*|v) = (L_2^t w^*|v) \quad \forall v \in E, \quad w^* \in F^*, \\ &\implies (L_1^t - L_2^t)w^* = 0 \quad \forall w^* \in F^* \implies L_1^t = L_2^t. \end{aligned}$$

$E^{**} = E$ ,  $F^{**} = F$ , и каждому  $L^t$  соответствует ровно одно отображение  $L^{tt} : E \rightarrow F$ , которое поэтому совпадает с  $L$ . Но тем самым доказано, что соответствие  $L \rightarrow L^+$  еще и сюръективно.

2. Соотношение (2.4.18) задает линейное отображение  $\omega \rightarrow {}^*\omega$ ,

$$({}^*\omega)_{i_{p+1}\dots i_n} = \frac{1}{(n-p)!p!} \omega^{i_1\dots i_p} \varepsilon_{i_1\dots i_n}.$$

Оно инъективно, так как  $\omega \neq 0 \implies {}^*\omega \neq 0$ . Но для линейных отображений конечномерных пространств одинаковой размерности инъективность влечет за собой сюръективность и наоборот.

3. Для  $\Phi : q^i \rightarrow \bar{q}^i(q)$  имеем  $(T(\Phi))_{ij} = \frac{\partial \bar{q}^i}{\partial q^j}$ , следовательно,  $(T(\Phi^{-1}))_{ij}^t = (T^*(\Phi))_{ij} = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i}$ . Пусть

$\omega : q \rightarrow (q, \omega_i(q) dq^i)$ , тогда  $\Phi_*\omega : \bar{q} \rightarrow (\bar{q}, \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \omega_j(\Phi^{-1}(\bar{q})) d\bar{q}^i)$ . Компоненты преобразуются как

базис  $\partial_i$  пространства  $T(M)$  и поэтому как градиент  $\frac{\partial}{\partial \bar{q}^i} f(q(\bar{q})) = \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \frac{\partial f}{\partial q^j}$ . С другой стороны, дифференциалы можно записать просто как  $dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} d\bar{q}^j$ . Таким образом, компоненты остаются неизменными.

4. При замене карт  $(x, y, z) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$  (сферическая система координат) и  $(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$  (цилиндрическая система координат) метрика изменяется с  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  (более педаггичной была бы запись  $dx^2$  в виде  $dx \otimes dx$ ) на  $dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$  и соответственно  $d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$ . Следуя примечанию (2.4.12,3), из ковариантных компонент  $(f, r, f, \vartheta, f, \varphi)$  и  $(f, \rho, f, \varphi, f, z)$  получаем компоненты  $v_i/\sqrt{g_{ii}}$ :

$$\left( f, r, \frac{1}{r} f, \vartheta, \frac{1}{r \sin \vartheta} f, \varphi \right) \quad \text{или} \quad \left( f, \rho, \frac{1}{\rho} f, \varphi, f, z \right).$$

5. Воспользуйтесь картой произведения. На ней все факторизуется.
6. а) по замечанию (2.4.17,1) на карте в окрестности точки  $q$

$$(i_X\omega|X_1, \dots, X_{p-1}) = \frac{1}{(p-1)!} X^i \omega_{i i_1 \dots i_{p-1}} X_1^{i_1} \dots X_{p-1}^{i_{p-1}} = p\omega(X, X_1, \dots, X_{p-1});$$

б) следует из а), так как  $(\omega|fX, X_1, \dots, X_{p-1}) = f(\omega|X, X_1, \dots, X_{p-1})$ ;

в) следует из а) и того, что  $(\omega|X, Y, \dots) = -(\omega|Y, X, \dots)$ .

7. Пусть  $\omega = \omega_{1\dots m} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \omega_{1\dots m} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^{j_1}} \dots \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{j_m}} d\bar{x}^{j_1} \wedge \dots$   
 $\dots \wedge d\bar{x}^{j_m} = \omega_{1\dots m} \det \left( \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right) d\bar{x}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}^m$ .

## 2.5. Производные

На многообразии, не наделенном никакой дополнительной структурой, существует как обобщение элементарных операций дифференцирования только внешнее дифференцирование форм. Если векторным полем задан локальный поток, то он определяет производную Ли произвольных тензорных полей.

Внешнее дифференцирование  $d$  (см. 2.4.3) допускает обобщение до отображения

$$E_p(M) \xrightarrow{d} E_{p+1}(M),$$

которое содержит в качестве частных случаев производные из элементарного векторного анализа.

### Определение (2.5.1)

Пусть  $\omega$  —  $p$ -форма, которая в области карты имеет вид

$$\omega = \frac{1}{p!} \sum_{(i)} c_{(i)} dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}, \quad c_{(i)} \in C^\infty(M).$$

Тогда **внешней производной** называется  $(p+1)$ -форма

$$d\omega = \frac{1}{p!} \sum_{(i)} dc_{(i)} \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p}.$$

Отсюда следуют правила внешнего дифференцирования.

**Правила внешнего дифференцирования (2.5.2):**

- а)  $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ ,  $\omega_i \in E_p(M)$ ;  
 б)  $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$ ,  $\omega_1 \in E_p$ ,  $\omega_2 \in E_q$ ;  
 в)  $d(d\omega) = 0$ ,  $\omega \in E_p$ ,  $p = 0, 1, \dots, m$ .

Правила а) и б) очевидны, правило в) следует из симметрии частной производной

$$d(d\omega) = \sum_{(i)} \sum_{k,j} \frac{\partial^2 c_{(i)}}{\partial q^k \partial q^j} dq^k \wedge dq^j \wedge dq^{i_1} \wedge \dots \wedge dq^{i_p} = 0.$$

## Примечания (2.5.3)

1. Существенно, что определение (2.5.1) имеет смысл, не зависящий от координат, так как операция внешнего дифференцирования  $d$ , как говорят, естественна относительно диффеоморфизмов  $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ . Последнее означает, что

$$\Phi_* d\omega = d\Phi_* \omega,$$

или что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_p(M_1) & \xrightarrow{\Phi_*} & E_p(M_2) \\ d \downarrow & & \downarrow d \\ E_{p+1}(M_1) & \xrightarrow{\Phi_*} & E_{p+1}(M_2) \end{array}$$

коммутативна. Это следует уже из доказанного частного случая (2.4.37,4), поскольку  $d$  определяется правилами (2.5.2), если задано, каким образом  $d$  действует на функции, и последние определены независимо от карт:

$$\begin{aligned} \Phi_* \omega &= \sum_{(i)} \Phi_*(c_{(i)}) \Phi_*(dq^{i_1}) \wedge \dots \wedge \Phi_*(dq^{i_p}) = \\ &= \sum_{(i)} c_{(i)} \circ \Phi^{-1} d(q^{i_1} \circ \Phi^{-1}) \wedge \dots \wedge d(q^{i_p} \circ \Phi^{-1}) \end{aligned}$$

и

$$\Phi_*(d\omega) = \sum_{(i)} d(c_{(i)} \circ \Phi^{-1}) \wedge d(q^{i_1} \circ \Phi^{-1}) \wedge \dots \wedge d(q^{i_p} \circ \Phi^{-1}).$$

В частности, если  $\Phi$  — диффеоморфизм замены карт, то  $d\omega$  в новой системе координат строится так же, как в старой, только все выражается через новые координаты.

2. Соотношение  $\Phi^* d\omega = d\Phi^* \omega$  справедливо не только для диффеоморфизмов, но и для всех прообразов форм (2.4.41). Если задано отображение  $\Psi : M_2 \rightarrow M_1$ , то формы, заданные на  $M_1$ , с помощью отображения  $\Psi^*$  распространяются на  $M_2$ . В частности, если  $M_2$  — подмногообразие в  $M_1$  и  $\Psi$  — естественное инъективное отображение, следовательно,  $\Psi^*$  — ограничение его на  $M_2$ , то соотношение  $\Psi^* d\omega = d\Psi^* \omega$  означает, что внешняя производная ограничения есть просто ограничение внешней производной.
3. Линейность а) и правила Лейбница б) — свойства каждой производной. Знак в б) производной  $E_p \rightarrow E_{p+1}$  возникает из требования согласованности с формулой  $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1$ . Правило в) фиксирует  $d$ , задавая действие этой операции на  $E_0$ . В случае используемой в теории поля ковариантной внешней производной правило в) обычно опускают, и действие производной на  $E_1$  приходится постулировать особо.

## Примеры (2.5.4)

Пусть  $M = \mathbb{R}^3$ . Следуя (2.4.33,1), отождествляем  $E_0$  с  $E_3$  и  $E_1$  с  $E_2$ . Связь между этими обозначениями и обозначениями векторного анализа имеет следующий вид:  $(df)_i = (\text{grad } f)_i$ ,  $*(dv)_i = (\text{rot } \mathbf{v})_i$ ,  $*d^* \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$ . Правила (2.5.2) включают в себя частные случаи:

- б)  $p = q = 0$ :  $\text{grad } f \cdot g = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f$ ;
- б)  $p = 0, q = 1$ :  $\text{rot}(f \cdot \mathbf{v}) = [\text{grad } f \wedge \mathbf{v}] + f \text{ rot } \mathbf{v}$ ;
- б)  $p = q = 1$ :  $\text{div}[\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}] = *(d(v \wedge w)) = *(dv \wedge w) - *(v \wedge dw) = (\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{w})$ ;
- а)  $p = 0$ :  $\text{rot grad } f = 0$ ;
- а)  $p = 1$ :  $\text{div rot } \mathbf{v} = 0$ ;
- б) а)  $\text{div}(f \cdot \text{rot } \mathbf{v}) = (\text{grad } f \cdot \text{rot } \mathbf{v})$ .

Из векторного анализа известно, что в  $\mathbb{R}^3$  безвихревое векторное поле представимо в виде градиента, а бездивергентное — в виде ротора. Чтобы ввести такие векторные поля на многообразиях, нам понадобится следующее определение.

### Определение (2.5.5)

$p$ -Форма  $\omega$  называется замкнутой, если  $d\omega = 0$ , и точной, если  $\omega = dv$ ,  $v \in E_{p-1}(M)$ .

### Примечания (2.5.6)

1. Как следует из правила (2.5.2,в), точность формы влечет за собой ее замкнутость; точные формы образуют линейное подпространство линейного пространства замкнутых форм.
2. Замкнутые формы образуют собственное подпространство. Рассмотрим на  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  1-формы

$$\omega_i = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \operatorname{Im} \frac{dz}{z}, \quad z = x + iy, \quad \text{и} \quad \omega_r = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \operatorname{Re} \frac{dz}{z}.$$

По определению замкнутости форм имеем

$$d\omega_i = d\omega_r = 0,$$

и локально справедливо соотношение

$$\omega_r + i\omega_i = d \ln z.$$

Но так как функция  $\ln z$  не определена на  $M$ , то форма  $\omega_i$  не точна. При этом существенно, что из  $\mathbb{R}^2$  исключено начало. В точке  $\{0\}$  формы имеют особенность, и их производная отлична от нуля.

3. Если  $M$  — звездобразное<sup>9</sup> открытое множество из  $\mathbb{R}^n$  (рис.2.13), то существует отображение  $A : E_p \rightarrow E_{p-1}$  такое, что  $A \circ d + d \circ A = 1$  (задача (2.5.14,7)). Поэтому для многообразий, диффеоморфных звездобразным многообразиям  $M$ , из  $d\omega = 0$  следует  $\omega = d(A\omega)$  (лемма Пуанкаре). Так как в  $\mathbb{R}^n$  каждая окрестность содержит выпуклое множество, то для достаточно малых окрестностей из замкнутости вытекает точность. Следовательно, локальное утверждение (2.5.6,1) обратимо.
4. По определению,  $p$ -формы с  $p < 0$  равны нулю, тогда из  $df = 0$  должно было бы следовать  $f = 0$ . Однако этот случай вырожден, и в действительности из  $df = 0$  вытекает только  $f = \text{const}$ .
5. В каждой точке  $x$  касательного пространства  $(m - n)$  линейно независимых 1-форм  $\omega_j$  задают  $n$ -мерное подпространство  $\mathcal{N}_x = \{v \in T_x(M) : (\omega_j|v) = 0 \quad \forall j\}$ . Возникает вопрос, можно ли найти  $n$ -мерные подмногообразия  $N$ , такие, что  $T_x(N) = \mathcal{N}_x \quad \forall x$  ("интегрируемость форм  $\omega_j$ "). По определению (2.1.9),  $N$  задаются локально уравнениями  $0 = f_j \in C^\infty(M)$ ,  $j = 1, \dots, m - n$ . Заметим, что 1-формы  $df_j$  удовлетворяют условию  $df_j|_N = 0$  и, следовательно, обладают требуемым свойством  $(df_j|v) = 0 \quad \forall v \in T_x(N)$ . Они образуют базис таких форм, что позволяет представить последние локально в виде  $\omega_j = c_{jk} df_k$ . При этом  $d\omega_j = \nu_{jk} \wedge \omega_k$ ,  $E_1 \ni \nu_{ij} = dc_{ji} \times (c^{-1})_{ik}$  или  $d\omega_j \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_{m-n} = 0 \quad \forall j$ . Это означает, что  $N$  существует только в том случае, если внешние производные форм  $\omega$  имеют по крайней мере один множитель из натянутого на них пространства. Если  $d\omega_j = 0$ , то в силу примечания (2.5.6,3) локально

<sup>9</sup>Множество  $S \subset \mathbb{R}^n$  называется звездобразным относительно точки  $P$ , если отрезок прямой, соединяющий любую точку из  $S$  с  $P$ , целиком лежит в  $S$ . Выпуклое множество звездобразно относительно любой своей точки.

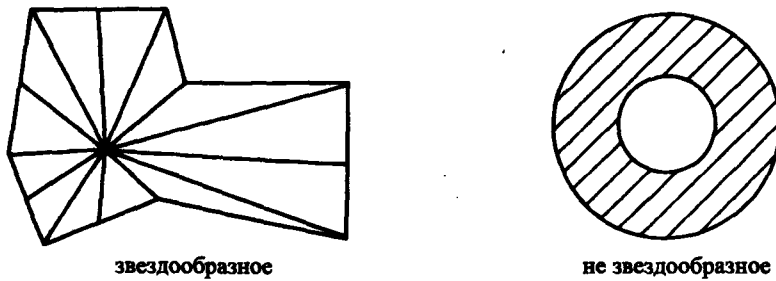


Рис. 2.13. Звездность на плоскости

$\omega_j = df_j$ ,  $\omega_j$  интегрируемы и  $N$  задается уравнениями  $f_j = \text{const}$ . По теореме Фробениуса [1, §10, 9] кажущийся более общим случай  $d\omega_j = \nu_{jk} \wedge \omega_k$  сводится к тому что рассмотренному с помощью подходящих линейных комбинаций, и эти условия необходимы и достаточны для локальной интегрируемости. Они гарантируют, что элемент поверхности может быть продолжен с инфинитезимального на локальный уровень; вопрос же о возможности продолжения на глобальный уровень остается открытым. Правда, при  $n = 1$  условие интегрируемости всегда выполнено, поскольку в базисе пространства  $T_n^*(M)$  в этом случае недостает лишь одной формы  $\omega_0$  и  $\omega_0 \wedge \omega_0 = 0$ , каждая  $d\omega_k$  должна содержать по крайней мере один множитель  $\omega_j$ . В этом случае  $N$  характеризуется векторным полем  $X \in T_0^1$ , и, как показано в параграфе 2.3, в  $X$  локально всегда существуют интегральные кривые. В общем случае  $n$ -мерные подмногообразия инвариантны относительно локальных потоков  $\Phi^X$ , порожденных векторным полем  $X$ , удовлетворяющим условию  $(\omega_j|X) = 0$ , и даже локально порожденных, если  $\Phi^X$  могут действовать на точку. Вскоре познакомимся с условием интегрируемости потоков, сопряженным с приведенным выше условием интегрируемости форм. При попытке продолжить потоки сколь угодно далеко может представиться случай, когда траектории, как в (2.3.14), возвращаются к исходной точке, проходя сколь угодно близко от нее. В результате множество точек, достижимых из начальной точки, оказывается всюду плотным в области высокой размерности и не является многообразием.

Вообще говоря, производной векторного поля  $T$  невозможно придать смысл, не зависящий от координат: для построения производной необходимо сравнить  $T(q)$  и  $T(q + \delta q)$ , а относительная ориентация (2.2.10) касательных пространств зависит от координат. Например, для  $\nu \in T_0^1$  производная  $\nu_{i,k}$  преобразуется не как тензор второго порядка. Но в комбинации  $\nu_{i,k} - \nu_{k,i}$ , соответствующей внешней производной, нежелательные члены взаимно уничтожаются. Но если задано векторное пространство  $X$ , то оно порождает локальный поток  $\Phi_t^X$ . Чтобы определить производную другого векторного поля  $\check{t}$  в точке  $q$ , нужно касательные векторы вдоль траектории  $q$ ,  $q(t) = \Phi_t^X(q)$ , отобразить в  $T_q(M)$  с помощью  $T_{q(t)}(\Phi_{-t}^X)$ . Таким образом, сравнению подлежат два вектора в одной и той же точке  $q$ , а именно вектор  $\check{t}(q)$  (значение векторного поля в точке  $q$ ) и вектор, получающийся из  $\check{t}(q(t))$  при обращении времени. Последний вектор можно представить также в виде  $(\Phi_t^{X*}\check{t})(q)$  (см. (2.4.41) и рис. 2.14).

Соответствующая производная

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^{X*}\check{t})(q)$$

не зависит от координат, так как в нее входят только векторы из касательного пространства  $T_q(M)$  и дифференцирование векторов коммутует с линейными преобразованиями. Те же соображения остаются в силе и для произвольных тензорных полей, и мы приходим к следующему определению (см. (2.2.23)).

### Определение (2.5.7)

Производная Ли  $L_X : T_s^r \rightarrow T_s^r$  определяется выражением

$$L_X \check{t} = \frac{d}{dt} \Phi_t^{X*} \check{t} |_{t=0}, \quad \check{t} \in T_s^r.$$

### Примечания (2.5.8)

1. Существенно, что должно быть задано векторное поле  $X$ , а не только вектор из  $T_q(M)$ . Соответственно выражение для  $L_X \check{t}(q)$  содержит не только значения компонент векторного поля в точке  $q$ , но и их производные, за исключением того случая, когда  $r = s = 0$ .

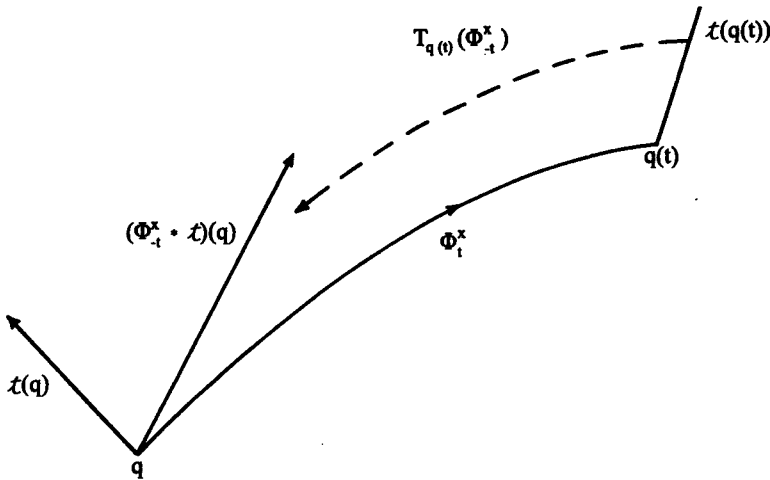


Рис. 2.14. Смысл производной Ли

2. Если векторное поле  $X$  порождает аналитический поток, то примечание (2.3.11,2) может быть обобщено до

$$\Phi_t^{X*} \check{t} = e^{tL_X} \check{t}, \quad \check{t} \in T_s^r.$$

3. Обычно в литературе  $L_X$  определяется изменением, вызванным инфинитезимальной заменой карт  $q^i \rightarrow q^i + tX^i(q)$ .

### Свойства производной Ли (2.5.9)

1. Отображения тензорных полей, порождаемые диффеоморфизмами  $\Phi$ , сохраняют алгебраическую структуру тензорных полей, поэтому для  $\check{t}_i \in T_s^r(M)$ ,  $X, Y \in T_0^1(M)$  справедливы следующие соотношения:

- (i)  $\Phi_t^{X*}(\check{t}_1 + \check{t}_2) = \Phi_t^{X*}\check{t}_1 + \Phi_t^{X*}\check{t}_2$ ;
- (ii)  $\Phi_t^{X*}(\check{t}_1 \otimes \check{t}_2) = (\Phi_t^{X*}\check{t}_1) \otimes (\Phi_t^{X*}\check{t}_2)$ ;
- (iii)  $\Phi_t^{X*}(\check{t}_1 | \check{t}_2) = (\Phi_t^{X*}\check{t}_1 | \Phi_t^{X*}\check{t}_2)$ ;
- (iv)  $\Phi_t^{X*} i_Y \omega = i_{\Phi_t^{X*} Y} \Phi_t^{X*} \omega$ .

Для бесконечно малых  $t$  отсюда вытекает

- (i)  $L_X(\check{t}_1 + \check{t}_2) = L_X \check{t}_1 + L_X \check{t}_2$ ;
- (ii)  $L_X(\check{t}_1 \otimes \check{t}_2) = (L_X \check{t}_1) \otimes \check{t}_2 + \check{t}_1 \otimes L_X \check{t}_2$ ;

$$(iii) L_X(\check{t}_1|\check{t}_2) = (L_X\check{t}_1|\check{t}_2) + (\check{t}_1|L_X\check{t}_2);$$

$$(iv) L_X(i_Y\omega) = i_{(L_X Y)}\omega + i_Y(L_X\omega).$$

Для изометрических (соответственно канонических) преобразований  $\Phi$  справедливо соотношение  $\Phi_*g = g$ , или  $\Phi_*(\check{t}_i|\check{t}_k) = \langle \Phi_*\check{t}_i|\Phi_*\check{t}_k \rangle$ . Поэтому для порожденных векторных полей Киллинга (соответственно, Гамильтона)  $X$  имеем  $L_X(\check{t}_i|\check{t}_k) = \langle L_X\check{t}_i|\check{t}_k \rangle + \langle \check{t}_i|L_X\check{t}_k \rangle$ .

## 2. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T_s^r(M_1) & \xrightarrow{\Psi_*} & T_s^r(M_2) \\ \Phi_t^{X*} \downarrow & & \downarrow (\Phi_t^{\Psi_* X})_* \\ T_s^r(M_1) & \xrightarrow{\Psi_*} & T_s^r(M_2) \end{array}$$

следует коммутативность ее инфинитезимального варианта:

$$\begin{array}{ccc} T_s^r(M_1) & \xrightarrow{\Psi_*} & T_s^r(M_2) \\ L_X \downarrow & & \downarrow L_{\Psi_* X} \\ T_s^r(M_1) & \xrightarrow{\Psi_*} & T_s^r(M_2) \end{array}$$

Таким образом,  $L_{\Psi_* X}\Psi_*\check{t} = \Psi_*L_X\check{t}$ .

## 3. Так как отображение $d$ естественно относительно диффеоморфизмов в (2.5.3), то оно коммутирует с $L_X$ . Формально это выглядит следующим образом ( $\omega \in E_p$ ):

$$L_X d\omega = \frac{d}{dt}\Phi_t^{X*}d\omega|_{t=0} = \frac{d}{dt}d\Phi_t^{X*}\omega|_{t=0} = d\left(\frac{d}{dt}\Phi_t^{X*}\omega|_{t=0}\right) = dL_X\omega.$$

То же можно записать в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E_p(M) & \xrightarrow{L_X} & E_p(M) \\ d \downarrow & & \downarrow d \\ E_{p+1}(M) & \xrightarrow{L_X} & E_{p+1}(M) \end{array}$$

## 4. На $E_p$ производную Ли $L_X$ можно представить с помощью $d$ и внутреннего произведения $i_X$ (см. (2.4.33,1)):

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X.$$

Доказательство см. в задаче (2.5.14,6). Это также показывает, что  $dL_X = d \circ i_X \circ d = L_X d$  и  $i_X \circ L_X = L_X \circ i_X$ .

## 5. Производная Ли $L_X$ согласуется с линейной структурой относительно $X$ :

$$(i) L_{X_1+X_2} = L_{X_1} + L_{X_2};$$

$$(ii) L_{cX} = cL_X, c \in \mathbb{R}.$$

Что касается структуры модулей векторных полей, то из свойства (2.5.9,4) следует

$$L_f X = fL_X + df \wedge i_X \quad \text{на } E_p,$$

так как

$$i_{fX}d\omega + di_{fX}\omega = fi_Xd\omega + d(fi_X\omega) = f(i_Xd + di_X)\omega + df \wedge i_X\omega \forall \omega \in E_p.$$

Дополнительный член с  $df$  обусловлен тем, что в  $L_X$  входят производные от  $X$ . Грубо говоря,  $X$  и  $fX$  по-разному смещают начало и конец ковектора.

6. Из свойств (2.5.9,1(iii)) и (2.5.9,3) заключаем, что  $(df|L_XY) = L_X(df|Y) - (dL_Xf|Y) = (L_XL_Y - L_YL_X)f$ . Обозначим векторное поле  $L_XY$  скобками Ли  $[X, Y]$ . В этих обозначениях приведенное выше соотношение примет вид

$$L_{L_XY} = L_XL_Y - L_YL_X \quad \text{на } T_0^0,$$

откуда следует, что  $L_XY = -L_YX$ , так как векторное поле полностью характеризуется действием на  $T_0^0$ . Правда, соотношение

$$L_{[X,Y]} = L_XL_Y - L_YL_X$$

может быть продолжено на все  $T_s^r$ . Если применить  $L_XL_Y - L_YL_X$  к  $\check{t} \in T_s^0$ :

$$\check{t} = \sum_{(i)} c_{(i)} dq^{i^1} \otimes \dots \otimes dq^{i^s}$$

по правилам сложения и умножения тензоров, то остаются только члены, в которых один сомножитель дифференцируется дважды. Все остальные члены взаимно сокращаются из-за антисимметричных комбинаций. Для оставшихся членов рассматриваемое соотношение выполняется в силу свойства (2.5.9,3). В силу свойства (2.5.9,1) оно должно выполняться на всем  $T_s^r$ .

### Примеры (2.5.10)

1.  $r = s = 0$ .  $\Phi_t^{X^*}f = f \circ \Phi_t^X = e^{tL_X}f = \tau_t^X f$ . В этом случае (2.5.7) совпадает с более ранним определением (2.3.11,2). Если на какой-то карте  $X$  совпадает с  $X^i\partial_i$ , то из (2.5.7) вытекает

$$L_Xf = X^i f_{,i}.$$

Необходимо обратить внимание на то, что  $\Phi_t^{X^*}$  порождает автоморфизм  $\tau_t$ .

2.  $r = 0, s = 1$ :  $\omega = \omega_i dq^i, X = X^k \partial_k$ . Из правил следует

$$L_X\omega = (L_X\omega_i) dq^i + \omega_i d(L_Xq^i) = (X^k \omega_{i,k} + \omega_k X_{,i}^k) dq^i.$$

3.  $r = 1, s = 0$ : как показывают вычисления ( $\omega \in T_1^0, Y = Y^i \partial_i \in T_0^1$ ),

$$\begin{aligned} L_X(\omega|Y) &= \omega_i Y_{,k}^i X^k + \omega_{i,k} Y^i X^k, \\ &= \omega_i (Y_{,k}^i X^k - X_{,k}^i Y^k) + (\omega_{i,k} X^k + \omega_k X_{,i}^k) Y^i, \\ &= (\omega|L_XY) + (L_X\omega|Y). \end{aligned}$$

Следовательно,  $i$ -я компонента производной Ли от  $Y$  по  $X$  равна

$$Y_{,k}^i X^k - X_{,k}^i Y^k.$$

4. Для  $X = \partial_i, Y = \partial_j$  получаем  $[X, Y] = 0$ . Обращение в нуль скобок Ли от векторов естественного базиса соответствует коммутативности частных производных.



**Интегрируемость векторных полей (2.5.11)**

В заключение (2.5.6,5) уместно спросить следующее. Предположим, что  $X_j$  — векторные поля, задающие в каждой точке  $x$   $n$ -мерное подпространство  $\mathcal{N}_x \subset T_x(M)$  (т.е. индекс  $j$  принимает значения от 1 до, по крайней мере,  $n$ ). Когда существуют  $n$ -мерные подмногообразия  $N$ , такие, что  $T_x(N) = \mathcal{N}_x \quad \forall x \in N$ ? (В этом случае  $X_j$  называются **образующими поверхность** или **интегрируемыми**.) На карте (2.1.9) имеем  $N = \{x_1, \dots, x_m : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$  и  $T_x(N)$  натянута на  $\partial/\partial x_k, k = 1, \dots, n$ . Векторные поля  $X_j$  должны иметь вид  $c_j^k \partial/\partial x_k$ , где  $c$  имеет ранг  $n$ . Из примера (2.5.10,3) заключаем, что

$$[X_i, X_l] = \left( c_i^j \frac{\partial}{\partial x_j} c_l^k - c_l^j \frac{\partial}{\partial x_j} c_i^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad i, l, j, k = 1, \dots, n,$$

и что  $\partial/\partial x_k$  можно представить в виде линейных комбинаций полей  $X_j$ . Для того чтобы  $X_j$  образовывали поверхности, их скобки Ли также должны лежать в  $\mathcal{N}_x$ . Как следует из (2.5.6,5), это условие достаточно и для локальной интегрируемости: пусть  $\mathcal{N}_x^\perp$  — линейное пространство форм  $\omega$ , удовлетворяющих условию  $(\omega(x)|X_j(x)) = 0 \quad \forall j, x$  из некоторой окрестности. Из задачи (2.5.14,9) известно, что

$$(d\omega|X, Y) = -(\omega|[X, Y]) \quad \forall \omega \in \mathcal{N}_x^\perp, \quad X, Y \in \mathcal{N}_x.$$

Таким образом, справедлива следующая цепочка отношений эквивалентности:  $d\omega$  содержит множитель из  $\mathcal{N}_x^\perp \Leftrightarrow (d\omega|X, Y) = 0 \Leftrightarrow (\omega|[X, Y]) = 0 \Leftrightarrow [X, Y] \in \mathcal{N}_x$ . Если интегрируемость требуется доказать со стороны векторных полей, то следует придерживаться пути, указанном в (2.5.6,5). На наглядном уровне ясно, что скобки Ли  $[X_j, X_k]$  должны лежать в  $\mathcal{N}_x$ : порождаемые  $X_j$  потоки  $\Phi_{\tau_j}^{X_j}$  должны оставлять  $N$  инвариантным; следовательно, отображение

$$\Phi_{\tau_j}^{X_j} \circ \Phi_{\tau_k}^{X_k} \circ \Phi_{-\tau_j}^{X_j} \circ \Phi_{-\tau_k}^{X_k}$$

не выводит из  $N$ , и скобки Ли  $[X_j, X_k]$  могут быть получены отсюда:

$$[L_{X_j}, L_{X_k}] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-2} \left( \exp[\tau L_{X_j}] \exp[\tau L_{X_k}] \exp[-\tau L_{X_j}] \exp[-\tau L_{X_k}] - 1 \right).$$

Для  $X_j$  естественным базисом является

$$\Phi_{\tau_j}^{X_j} \circ \Phi_{\tau_k}^{X_k} = \Phi_{\tau_k}^{X_k} \circ \Phi_{\tau_j}^{X_j},$$

а карта (2.1.9) для  $N$  имеет вид

$$\Phi_{\tau_1}^{\partial_1} \circ \Phi_{\tau_2}^{\partial_2} \circ \dots \circ \Phi_{\tau_n}^{\partial_n} x \rightarrow (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Обращая ход рассуждений, получаем для  $n$  независимых  $X_j$  с  $\Phi_{\tau_j}^{X_j} \circ \Phi_{\tau_k}^{X_k} = \Phi_{\tau_k}^{X_k} \circ \Phi_{\tau_j}^{X_j}$   $n$ -мерное многообразие  $N$  и карту, на которой  $X^j$  образуют естественный базис  $\partial/\partial \tau_j$  (см. задачу (2.5.14,10)). Следовательно, равенство  $[X_j, X_k] = 0$  достаточно для локальной интегрируемости. Кажущийся более общий случай  $[X_j, X_k] = c_{jkm} X_m$  может быть сведен к предыдущему путем введения линейных комбинаций  $\tilde{X}_j$  векторных полей  $X_k$ , удовлетворяющих условию  $[\tilde{X}_j, \tilde{X}_k] = 0$ .

**Примеры (2.5.12)**

**1.  $M = \mathbb{R}^3$ .** Пусть  $\omega = dx + zdy \in E_1(\mathbb{R}^3)$ ,  $\omega \wedge d\omega = dx \wedge dz \wedge dy \neq 0$ , следовательно, 1-форма  $\omega$  не интегрируема. Пространство, ортогональное  $\omega$ , натянута на

$$X = -z \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial z}:$$

Действительно,  $[X, Y] = \partial/\partial x \neq aX + bY$ . Порожденные  $X$  и  $Y$  потоки

$$\Phi_{\tau_1}^X : (x, y, z) \rightarrow (x - \tau_1 z, y + \tau_1, z)$$

и

$$\Phi_{\tau_2}^Y : (x, y, z) \rightarrow (x, y, z + \tau_2),$$

если их применить к одной точке, не образуют поверхности, а заполняют в  $\mathbb{R}^3$  открытые множества:

$$\Phi_{\tau_3}^Y \circ \Phi_{\tau_2}^X \circ \Phi_{\tau_1}^X(0, 0, 0) = (-\tau_2\tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_3).$$

Например, если точки  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  заполняют  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , то образ точки  $(0, 0, 0)$  также заполняет ту же область. Этот пример показывает также, что не обязательно должны существовать гиперповерхности, ортогональные векторному полю в смысле заданной метрики. Например, в  $\mathbb{R}^3$ , наделенном евклидовой метрикой, векторы, ортогональные  $X = \partial/\partial x + z \partial/\partial y$ , аннулируются  $\omega = dx + zdy$  и поэтому не образуют поверхности. Тем не менее, по теореме (2.3.12) существуют гиперповерхности  $N$ , трансверсальные к  $X$  в том смысле, что линейная комбинация  $T_x(N)$  и  $X(x)$  совпадает со всем пространством  $T_x(\mathbb{R}^m)$ .

2.  $M = \mathbb{R}^3$ . Пусть  $X_j$  — генератор вращений вокруг  $j$ -й координатной оси:

$$X_1 = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Эти три векторных поля порождают лишь двумерное  $\mathcal{N}_x$ , они ортогональны к  $dr$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ :  $(dr|X_j) = L_{X_j}r = 0$ . Поскольку 1-форма  $dr$  интегрируема:  $ddr = 0$ , то векторные поля  $X_j$  также интегрируемы. Действительно,  $[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk}X_k$ , потоки, порождаемые  $X_j$ , не выводят из двумерного подмногообразия  $r = \text{const}$ . В этом случае векторные поля  $X_j$  образуют поверхности, диффеоморфные  $S^2$ . Отображения типа  $\Phi_{\tau_1}^{X_1} \circ \Phi_{\tau_2}^{X_2}$  порождают на такой поверхности только локальную карту.

Скобки Ли наделяют векторные поля дополнительной алгебраической структурой, поскольку как произведение скобки Ли антикоммутиративны, дистрибутивны, а вместо ассоциативного закона удовлетворяют тождеству Якоби.

**Тождество Якоби (2.5.13)**

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

**Доказательство**

Тождество Якоби следует из тождества

$$\begin{aligned} L_{[X, [Y, Z]]} + L_{[Y, [Z, X]]} + L_{[Z, [X, Y]]} &= \\ &= L_X(L_Y L_Z - L_Z L_Y) - (L_Y L_Z - L_Z L_Y)L_X + \\ &+ L_Y(L_Z L_X - L_X L_Z) - (L_Z L_X - L_X L_Z)L_Y + \\ &+ L_Z(L_X L_Y - L_Y L_X) - (L_X L_Y - L_Y L_X)L_Z = 0, \end{aligned}$$

так как из  $L_X = 0$  (даже только на  $T_0^0(M)$ ) вытекает  $X = 0$ . □

**Задачи (2.5.14)**

1. Почему  $d$  нельзя определить на  $T_s^0$  независимо от карт?
2. Как выглядят ковариантные компоненты формы  $d\omega$  в обозначениях (2.5.1)?

3. Покажите в явном виде, что  $\Phi_* d\omega = d\Phi_* \omega$  для  $M = \mathbb{R}^n, p = 1$ .
4. Приведите для  $f \in C^2(M)$  прямое доказательство того, что  $L_X df = d(L_X f)$ .
5. Вычислите компоненты  $L_X Y, X, Y \in T_0^1$ , и  $L_X \alpha, \alpha \in T_1^0$ . Докажите, что  $L_X(\alpha|Y) = (L_X \alpha|Y) + (\alpha|L_X Y)$ .
6. Докажите, что на  $E_p$  (2.5.9,4)  $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ .
7. Задайте названное в (2.5.6,3) отображение  $E_p \xrightarrow{A} E_{p-1}$  следующим образом. Пусть область  $U$  — звездообразна относительно начала и пусть  $h: (0, 1) \times U \rightarrow U$  — отображение  $(t, x) \rightarrow tx$ . Для  $\omega \in E_p(U)$  разложим прообраз формы  $\omega$  относительно  $h$  на часть с  $dt$  и часть без  $dt$ :

$$h^* \omega = \omega_0 + dt \wedge \omega_M, \quad \omega_0 \in E_p((0, 1) \times U), \quad \omega_M \in E_{p-1}((0, 1) \times U).$$

Тогда

$$A\omega := \int_0^1 dt \wedge \omega_M \in E_{p-1}(U).$$

Докажите, что  $A \circ d + d \circ A = 1$ , и вычислите  $A\omega$  в  $\mathbb{R}^3$  для  $\omega \in E_1$  и  $E_2$ .

8. Приведите пример бездивергентного векторного поля  $\mathbf{E}$  в  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , которое нельзя записать в виде  $\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{A}$ .
9. Докажите, что для  $\omega \in E_1$

$$(d\omega|X, Y) = L_X(\omega|Y) - L_Y(\omega|X) - (\omega|[X, Y]).$$

10. Пусть  $X_j, j = 1, \dots, m$ , — векторные поля с  $[X_i, X_j] = 0$  и линейно независимыми  $X_j(q)$ . Докажите, что в окрестности точки  $q$  существует карта  $(U, \Phi)$  с  $\Phi_* X_j = \partial/\partial x_j$ . (Рассмотрите группу  $m$ -параметрических диффеоморфизмов, порожденных  $X_j$ .) Исследуйте, что происходит в простом случае, когда  $[X_i, X_j] \neq 0$ .

**Решения (2.5.15)**

1. При доказательстве соотношения  $d(dw) = 0$  существенна антисимметрия.

2.

$$(dw)_{i_1 \dots i_{p+1}} = \sum_{l=1}^{p+1} \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} (\omega)_{i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_{p+1}} \cdot (-)^l.$$

3.

$$\omega = c_k(x) dx^k, \quad d\omega = c_{k,i} dx^i \wedge dx^k, \quad \Phi_* \omega = c_k(x(\bar{x})) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j,$$

$$d\Phi_* \omega = \left( c_{k,i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} + c_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^r \partial \bar{x}^j} \right) d\bar{x}^r \wedge d\bar{x}^j = c_{k,i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^r \wedge d\bar{x}^j = \Phi_* d\omega.$$

4.

$$L_X L_Y f = L_X(df|Y) = (df|L_X Y) + (L_X df|Y) = L_{[X, Y]} f + (L_X df|Y),$$

следовательно,

$$(L_X df|Y) = L_Y L_X f = (d(L_X f)|Y) \forall Y \in T_0^1(M) \Rightarrow L_X df = d(L_X f),$$

**или**

$$dL_X = di_X d = L_X d \quad \text{на } f.$$

5.

$$L_X(\alpha|Y) = \alpha_i Y_k^i X^k + \alpha_{i,k} Y^i X^k = \alpha_i (L_X Y)^i + (L_X \alpha)_i Y^i,$$

$$= \alpha_i (Y_k^i X^k - X_k^i Y^k) + (\alpha_{i,k} X^k + \alpha_k X_k^i) Y^i$$

для  $X : q \rightarrow (q_i, X^i)$  и т.д.

6. Доказательство по индукции. При  $p = 0$ , по определению,  $i_X f = 0$  и  $i_X df = (df|X) = L_X f$ . Каждую  $(p+1)$ -форму можно теперь представить в виде

$$\sum_i df_i \wedge \omega_i, \quad \omega_i \in E_p, \quad f_i \in C^\infty,$$

и тогда

$$\begin{aligned} (i_X \circ d + d \circ i_X)df \wedge \omega &= i_X \circ (-df \wedge d\omega) + d \circ ((i_X df)\omega - df \wedge i_X \omega) = \\ &= -(i_X df) \wedge d\omega + df \wedge (i_X d\omega) + (d(i_X df)) \wedge \omega + i_X df \wedge d\omega + df \wedge d(i_X \omega) = \\ &= df \wedge L_X \omega + (L_X df) \wedge \omega = L_X(df \wedge \omega). \end{aligned}$$

Так как обе части формулы, выражающей свойство (2.5.9.4), представляют собой линейные операторы, то полученное соотношение выполняется также для  $\sum_i df_i \wedge \omega_i$  и, следовательно, на  $E_{p+1}(M)$ .

7. Для

$$\omega = \omega_{(i)}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

справедливо соотношение

$$h^* \omega = \omega_{(i)}(xt)(tdx^{i_1} + x^{i_1} dt) \wedge \dots \wedge (tdx^{i_p} + x^{i_p} dt) = \omega_0 + dt \wedge \omega_M.$$

Если обозначить  $d'$  внешней производную при фиксированном  $t$ , то

$$dA\omega = \int_0^1 dt d' \omega_M, \quad Ad\omega = \int_0^1 dt \left( \frac{\partial \omega_0}{\partial t} - d' \omega_M \right).$$

Как доказано выше,  $\omega_0|_{t=1} = \omega$  и  $\omega_0|_{t=0} = 0$ , следовательно,  $dA\omega + Ad\omega = \omega$ ,

$$p = 1 : A\omega = \int_0^1 dt x_i v_i(xt) = \int_0^x ds \cdot v,$$

$$p = 2 : \omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k, \quad (A\omega)_i = \int_0^1 dt t B_k x_j \varepsilon_{kji}.$$

8.  $E = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ . Представить это поле в виде  $E = \text{rot } A$  невозможно, так как в противном случае мы пришли бы к противоречию

$$4\pi = \int_{S^1} df \cdot E = \int_{S^1} df \cdot \text{rot } A = \int_{\partial S^1} ds \cdot A = 0,$$

поскольку  $\partial S^1 = \emptyset$ .

9.  $L_X(\omega|Y) = ((i_X \circ d + d \circ i_X)\omega|Y) + (\omega|L_X Y) = (d\omega|X, Y) + L_Y(\omega|X) + (\omega|[X, Y])$ .

10. Отображение  $(\tau_j) \rightarrow \Phi_{\tau_m}^{X_m} \circ \dots \circ \Phi_{\tau_1}^{X_1}(q) =: q(\tau_j)$  — диффеоморфизм окрестности нуля в  $\mathbf{R}^m$  на окрестность точки  $q$ :  $\partial q(\tau)/\partial \tau_j = X_j(q(\tau))$  и, по предположению,  $\det(X_j^k(q))$  при  $\tau = 0$ , и в силу этого во всей окрестности, не обращается в нуль. Пусть на  $\mathbf{R}^2$  заданы отображения  $X_1 : (x, y) \rightarrow (x, y; 1, 0)$  и  $X_2 : (x, y) \rightarrow (x, y; 0, 1+x)$  и  $q = 0$ . Тогда  $q(\tau) = \Phi_{\tau_2}^{X_2} \circ \Phi_{\tau_1}^{X_1}(0) = (\tau_1, \tau_2(1 + \tau_1))$  — диффеоморфизм, но

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} q(\tau) = (1, \tau_2) \neq X_1(q(\tau)).$$

## 2.6. Интегрирование

*$m$ -формы задают меры на многообразиях. Их интеграл есть не что иное, как обращение внешней производной в том смысле, что интегрирование  $m$ -форм по частям обобщает теорему Стокса.*

В (2.4.8,3) мы интерпретировали  $p$ -форму как меру  $p$ -мерного элемента объема. Интеграл от  $p$ -форм можно определить независимо от координат, затем, выбирая координатный базис и записывая формы в координатном виде, интегрируем их по этим координатам как обычно. Начнем с того, что распространим на окрестность все, о чем говорили прежде, применительно к точке. Итак, если  $\Omega$  —  $m$ -форма, носитель которой лежит в области карты  $(U, \Phi)$ , то образ  $\Omega$  в этой карте имеет вид

$$\Phi_*(\Omega) = w(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m, \quad w = (\Omega | \partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m),$$

и для относительно компактной окрестности  $U$  полагаем, по определению,

$$\int \Omega := \int_{-\infty}^{\infty} dx^1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx^m w(x). \quad (2.6.1)$$

Значение интеграла не изменяется при диффеоморфизмах  $x \rightarrow \bar{x}$ , поскольку  $\det(\partial x^i / \partial \bar{x}^j) > 0$ ,  $w$  при этом умножается на  $\det(\partial x^i / \partial \bar{x}^j)$  (см. задачу (2.4.44,7)) и справедливо равенство

$$\int d^m \bar{x} | \det \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} | w(x(\bar{x})) = \int d^m x w(x) \quad (2.6.2)$$

(см. [1,16.22,1]).

Здесь встречаемся с проблемой выбора знака. Нам необходимо принять решение, избежать которого не удастся даже в простейшем случае: что означает, например, интеграл по интервалу

$$\int_{(ab)} dx : \quad \int_a^b dx \quad \text{или} \quad \int_b^a dx ?$$

Принять самосогласованное решение о выборе знака на всем  $M$  удастся только на ориентируемых многообразиях, на которых существует не обращающаяся нигде в нуль  $m$ -форма  $\Omega$ , которая и определяет знак интеграла.

Чтобы избежать проблемы сходимости, будем интегрировать только такие формы, которые вне какой-то конечной области тождественно равны нулю. На многообразиях роль конечных областей в  $\mathbb{R}^m$  играют компакты, компактность инвариантна относительно диффеоморфизмов. Поэтому будем рассматривать формы типа  $f\Omega$ , где  $f \in C(M)$  с компактным носителем  $\text{supp } f$ . Обозначим их  $E_p^0$ . Тогда из каждого атласа можно выбрать конечное число карт  $(U_i, \Phi_i)$  таким образом, чтобы

$$\text{supp } f \subset \bigcup_i^{\text{конечная}} U_i.$$

Используя разложение единицы (см., например, [1,12.6,4]), можно записать, что  $f = \sum_i f_i$ , где  $f_i$  имеют носители в  $U_i$ . Тем самым приходим к следующему определению.

**Определение (2.6.3)**

**Интеграл**  $\int \Omega f$  с компактным носителем на ориентируемом многообразии  $M$  определяется выражением

$$\int_M \Omega f = \sum_i \int \Phi_{i*}(\Omega f_i).$$

При этом  $\sum_i f_i = f$ , где  $f_i$  — функции с носителями в областях карт  $(U_i, \Phi_i)$ , и приведенные выше интегралы заданы в (2.6.1), причем пользоваться следует картами с  $(\Omega|\partial_1 \dots \partial_m) > 0$ .

**Примечания (2.6.4)**

1. Интеграл не зависит от карт, если используются только карты с одинаковой ориентацией  $(\Omega|\partial_1 \dots \partial_m) > 0$ , т.е. при замене карт всегда  $\det(\partial x^i / \partial \bar{x}^j) > 0$ . Если воспользоваться картами  $(\bar{U}_i, \bar{\Phi}^i)$ , то, применяя разложение единицы  $\sum_{i,j} f_{ij} = f$  с  $\text{supp } f_{ij} \subset U_i \cap \bar{U}_j$ , нетрудно убедиться в том, что  $\int f \Omega$  имеет то же значение. Переход от  $\Phi_i$  к  $\bar{\Phi}_j$  в  $U_i \cap \bar{U}_j$  является заменой переменных интегрирования указанного выше типа, а поскольку под  $\sum_{i,j}$  всегда понимаются конечные суммы и поэтому не возникает проблема сходимости, то изменение порядка суммирования не приводит к каким-либо трудностям.
2. Для каждой  $C_0^\infty$ -функции  $f$  интеграл  $\int \Omega f$  представляет собой линейный функционал, ограниченный произведением  $\sup |f|$  на некоторую постоянную, зависящую от носителя функции  $f$ .  $\Omega$  задает меру на  $M$ . Функционал допускает обобщение на более широкий класс функций, не обязательно обладающих компактным носителем, но убывающих достаточно быстро.
3. Если  $\omega$  —  $p$ -форма и  $N$  — ориентируемое  $p$ -мерное подмногообразие в  $M$ , то  $\int_N \omega|_N$ , как видно из (2.6.3), определяется ограничением формы  $\omega|_N$ .
4. Интегралу от других тензорных полей невозможно придать не зависящий от карты смысл.  
Если  $M = (a, b)$ ,  $\omega$  — 1-форма  $df$  с носителем функции  $f$ , лежащим в  $M$ , то

$$\int df = \int_a^b dx \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

причем  $f$  должна обращаться в нуль на границе. Без каких бы то ни было условий на носитель функции  $f$  имеем  $\int df = f(b) - f(a)$ . Распространить определение (2.6.3) на многообразия с краем непосредственно было бы невозможно. Для этого необходимо обобщить приведенное выше правило. В итоге приходим к следующей теореме.

**Теорема Стокса (2.6.5)**

Пусть  $M$  — ориентируемое многообразие с краем и  $\omega$  —  $(m-1)$ -форма с компактным носителем. Тогда

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

**Примечания (2.6.6)**

1. Край  $\partial M$  не следует предполагать ориентируемым, так как ориентация многообразия  $M$  индуцирует ориентацию на  $\partial M$ . И хотя из доказательства теоремы вытекает, что в случае карты вида (2.1.20) ориентация многообразия  $M$  задается внешней формой  $w(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m$ ,  $w > 0$ , мы будем приписывать границе  $\partial M$  ориентацию

$-dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^m$ . Выбор знака здесь важен, так как при противоположном выборе равенство (2.6.5) было бы нарушено:  $M = [0, \infty)$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dx} dx = -f(0).$$

2. Требование компактности носителя важно даже в том случае, когда  $M$  — конечная часть пространства  $\mathbb{R}^n$ :  $M = (a, b)$ ,  $\partial M = \emptyset$ ,  $f = x$ ,

$$\int_a^b df = b - a \neq \int_{\partial M} f = 0.$$

3. Как видим, правило  $d \circ d = 0$  следует из того факта, что граница не имеет границы: пусть  $V$  — компактное подмногообразие с краем в  $M$ , тогда

$$\int_V d \circ d\omega = \int_{\partial V} d\omega = \int_{\partial \partial V} \omega = 0.$$

Как нетрудно убедиться,  $m$ -форма равна нулю, если интеграл от нее по любому компактному подмногообразию с краем равен нулю, поэтому  $d \circ d\omega = 0$ .

**Доказательство** теоремы (2.6.5)

Запишем интеграл в виде  $\int d\omega = \sum_i \int \omega_i$ , где  $\omega_i$  — компактные носители в областях  $U_i$  карт вида (2.1.20). Достаточно доказать, что  $\int_M d\omega_i = \int_{\partial M} \omega_i$ . На карте вида (2.1.18) имеем<sup>10</sup>

$$\omega_i = \sum_{j=1}^m g_j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^m.$$

Выберем ориентацию  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m$ . Тогда

$$\int_M d\omega_i = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \int_0^{\infty} dx^1 \int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx^m \frac{\partial g_j}{\partial x^j} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx^m g_1(0, x^2, \dots, x^m).$$

С другой стороны (см. (2.6.6, 1)),

$$\int_{\partial M} \omega_i = - \int_{-\infty}^{\infty} dx^2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx^m g_1(0, x^2, \dots, x^m),$$

~~таким~~ ограничение  $dx^1$  на  $\partial M$  равно нулю, в силу чего

$$\omega_i|_{\partial M} = g_1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

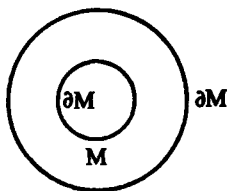
□

<sup>10</sup> ~~это~~ означает, что этот дифференциал отсутствует.

## Примеры (2.6.7)

$$1. M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1/2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}, \omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, d\omega = 0 \text{ (см. (2.5.6,2))},$$

$$0 = \int_{x^2+y^2=1} \omega - \int_{x^2+y^2=1/2} \omega = 2\pi - 2\pi.$$



Снова видим, что компактность носителя существенна, так как, не будь ее, можно было бы взять  $\omega$  на  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $\partial M = S^1$ , и прийти к противоречию  $0 = 2\pi$ . Видим также, что форма  $\omega$  не могла бы быть точной, поскольку из  $\omega = dv$  следовало бы, что

$$2\pi = \int_{S^1} \omega = \int_{S^1} dv = \int_{\partial S^1} v = 0, \quad \text{или } \partial S^1 = \emptyset.$$

2.  $C$  — одномерное подмногообразие с краем  $\subset \mathbb{R}^3$ ,  $\partial C = \{a, b\}$ , тогда имеем

$$\int_C df = \int_{\partial C} f \quad \text{или} \quad \int_C ds \cdot \text{grad } f = f(b) - f(a).$$

3.  $M$  — двумерное подмногообразие с краем в  $\mathbb{R}^3$  (но не обязательно часть плоскости),  $\omega$  — 1-форма  $\mathbf{w}$ . В векторных обозначениях теорема Стокса (2.6.5) записывается в виде

$$\int_M df \cdot \text{rot } \mathbf{w} = \int_{\partial M} ds \cdot \mathbf{w}.$$

4. Пусть  $M$  — трехмерное подмногообразие с краем из  $\mathbb{R}^3$ ,  $\omega$  — 2-форма  $\ast \mathbf{w}$ , тогда приходим к теореме Гаусса

$$\int_M dV \text{ div } \mathbf{w} = \int_{\partial M} df \cdot \mathbf{w}.$$

Чтобы установить, каким образом производная Ли связана с интегрированием, вспомним прежде всего об инвариантности интеграла относительно диффеоморфизма:

$$M_1 \xrightarrow{\Phi} M_2 : \int_{M_1} \omega = \int_{M_2} \Phi_* \omega. \quad (2.6.8)$$



В частности, если  $\Phi$  — это поток на  $M = M_1 = M_2$ , то инфинитезимальная версия диффеоморфизма (2.6.8) имеет вид

$$\int_M L_X \omega = 0, \quad X \in \mathcal{T}_0^1, \quad \omega \in E_m(M). \quad (2.6.9)$$

Если рассматривать инвариантную относительно потока  $m$ -форму  $\Omega$ , то перечисленные выше факты допускают формулировки, представляющие физический интерес. С такой ситуацией сталкиваемся при рассмотрении однопараметрических групп, сохраняющих ориентацию изометрий и канонических преобразований, оставляющих инвариантными  $*1$  или  $g \wedge q \wedge \dots \wedge q$ . В фазовом пространстве последняя форма принимает вид  $dq_1 \dots dq_m dp_1 \dots dp_m$  и называется мерой Лиувилля.

**Несжимаемость потока (2.6.10)**

Пусть  $\Phi_t$  — поток на  $M$  и  $\Omega$  —  $m$ -форма, для которой  $\Phi_{t*} \Omega = \Omega$ . Тогда  $\forall f \in C_0^\infty(M)$

$$\int \Omega \cdot f = \int \Omega \cdot (f \circ \Phi_t).$$

**Доказательство**

Воспользуемся соотношением (2.6.8) и тем, что

$$\Phi_{-t*}(\Omega \cdot f) = \Phi_{-t*} \Omega \cdot \Phi_{-t*} f = \Omega \cdot (f \circ \Phi_t).$$

Эти соотношения выполняются для всех измеримых функций. Например, если  $f$  — характеристическая функция  $\chi_A$  множества  $A$ , то из соотношения несжимаемости потока следует, что объем множества, измеренный с помощью  $\Omega$ , не изменяется со временем. Иначе говоря, множество  $A$  ведет себя, как несжимаемая жидкость. Поток несжимаемой жидкости снова и снова возвращает точки из  $A$  к их исходному положению. Последнему утверждению можно придать более точный смысл. □

**Теорема Пуанкаре о возвращении (2.6.11)**

Пусть

$$A \subset M \text{ и } \Phi_t(A) \subset A \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ и } \int \Omega \chi_A =: \Omega(A) < \infty.$$

Если  $\Phi_{t*} \Omega = \Omega$ , то почти все точки измеримого множества  $B \subset A$  бесконечно много раз возвращаются в  $B$ .

**Доказательство**

Пусть  $B \subset A$  — произвольное измеримое множество,  $\Omega(B) > 0$ , и  $\tau \in \mathbb{R}^+$  — единица времени,

$K_n = \bigcup_{j=n}^\infty \Phi_{-j\tau}(B)$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$  — множество точек, которые по крайней мере по истечении  $n$  или

более единиц времени попадают в  $B$ . Ясно, что имеет место следующая цепочка включений:

$$B \subset K_0 \supset K_1 \dots \supset K_{n-1} \supset K_n.$$

**Пересечения  $B \cap \left( \bigcap_{n \geq 0} K_n \right)$**  — это точки множества  $B$ , которые возвращаются в  $B$  по истечении

~~сильно~~ **сильно** ~~удобно~~ **удобно** ~~большого~~ **большого** промежутка времени. Это множество не пересекается с множеством ~~точек~~ **точек**, которые не возвращаются в  $B$  неограниченное число раз, т.е. таких, для которых какое-то посещение множества  $B$  оказывается последним. Покажем, что мера первого множества ~~равна~~ **равна** мере множества  $B$ . По предположению,

$$\Omega(K_n) = \Omega(\Phi_\tau K_n) = \Omega(K_{n-1}) \leq \Omega(A) < \infty$$

так как каждое из последующих множеств  $K_n$  вложено в предыдущее, и тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Omega \left( B \cap \left( \bigcap_{n=0}^m K_n \right) \right) = \Omega(B \cap K_0) - \sum_{i=1}^{\infty} \Omega(B \cap (K_{i-1} \setminus K_i)) = \Omega(B),$$

поскольку  $B \cap K_0 = B$  и  $K_{n-1} \supset K_n$  и  $\Omega(K_n) = \Omega(K_{n-1}) \Rightarrow \Omega(K_{n-1} \setminus K_n) = 0$ . Следовательно, мера произвольного измеримого множества  $B$  равна множеству тех его точек, которые бесконечно много раз возвращаются в  $B$ .  $\square$

При соответствующих условиях сохранение энергии задает в фазовом пространстве инвариантные по времени подмногообразия конечного объема, к которым применима теорема Пуанкаре. Однако неизвестны инвариантные области конечной меры в случае неограниченных сил (1.1.2) и более двух частиц, поскольку траектории, по которым частицы убегают на бесконечность, заполняют значительную часть фазового пространства. Теорема (2.6.11) не применима к траекториям убегания, но так как поток несжимаем, то большинство траекторий, уходящих на бесконечность, должно возвращаться.

### Теорема Шварцшильда о захвате (2.6.12)

Пусть снова  $\Phi_{t*}\Omega = \Omega$  и  $A$  — измеримое множество конечной меры  $\Omega(A) < \infty$ . Тогда же точки множества  $A$ , которые в прошлом принадлежали  $A$ , а в будущем навсегда покинут  $A$ , образуют множество меры нуль. То же верно и относительно тех точек, которые в некоторый конечный момент времени  $t$  впервые попадают в  $A$  и в будущем навсегда остаются в  $A$ .

### Доказательство

Пусть  $A_{\pm} = \bigcap_{\tau \geq 0} \Phi_{\tau}(A)$  — множества точек, которые навсегда остаются в  $A$  (соответственно, всегда были в  $A$ ). Тогда  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Omega(A_+) &= \Omega(\Phi_{-t}A_+) = \Omega \left( \bigcap_{\tau > -t} \Phi_{\tau}(A) \right), \\ &= \Omega \left( \bigcap_{-\infty < \tau < \infty} \Phi_{\tau}(A) \right) = \Omega(A_+ \cap A_-) = \Omega(A_-), \end{aligned}$$

или  $\Omega(A_+ \setminus A_+ \cap A_-) = \Omega(A_- \setminus A_+ \cap A_-) = 0$ .

Таким образом, траектории, которые приходят извне в  $A$  и захватываются, или, наоборот, навсегда покидают  $A$ , хотя они ранее всегда находились в  $A$ , заполняют в  $A$  самое большее множество меры нуль. Разумеется, система могла бы быть неустойчивой и тогда  $\Omega(A_+) = 0$ .  $\square$

### Примечания (2.6.13)

1. Инвариантность меры  $\Omega$  лежит в основе так называемой эргодической теории, поскольку позволяет доказать в общем случае существование среднего по времени

$$f_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \tau_t f \quad (\text{почти всюду})$$

функции  $f$ , которая должна быть только измеримой и не обязательно принадлежать классу  $C^{\infty}$  (эргодическая теорема Биркгофа и фон Неймана). Так как для доказательства этой теоремы используется спектральная теория в гильбертовом пространстве, то отложим его на будущее (см. [IV: Квантовая механика больших систем]), когда эргодическая теорема предстанет перед нами в виде простого частного случая более общей теории.

2. Значение теорем Пуанкаре, Биркгофа и фон Неймана для физики ограничено тем, что эти теоремы ничего не говорят о том, сколько понадобится ждать прежде, чем траектория вернется или среднее по времени приблизится к своему асимптотическому значению. Удивительно в этих теоремах то, что они позволяют высказать некоторые глобальные утверждения, которые нелегко “вычитать” из дифференциальных уравнений.
3. Мера  $\Omega$  служит лишь для того, чтобы измерять вероятность различных конфигураций. В случае меры Лиувилля такая интерпретация вполне обоснована. Для меры Лиувилля любое открытое множество  $B$  измеримо и

$$B \neq \emptyset \Leftrightarrow \Omega(B) > 0.$$

Таким образом, из теорем (2.6.11,12) следуют утверждения и для окрестности  $B$ .

4. С теоремой о возвращении связано много недоразумений, так как многие считают, будто из нее следует, что сохраняющий меру поток на компактном многообразии непременно должен возвращаться в начальное состояние. Но состояния — это вероятностные меры. Если избавиться от иллюзии, будто измерения могут производиться с бесконечной точностью, то они никогда не смогут стать точечными мерами, а должны быть формами вида  $f\Omega$ , где  $f$  — измеримая функция  $\in C^\infty(M)$ ,  $f > 0$  и  $\int f\Omega = 1$ . В [IV] мы познакомимся с системами с перемешиванием, состояния которых стремятся к равномерно распределенному состоянию  $\Omega/\int\Omega$ . Это кажущееся противоречие разрешается, если заметить, что хотя отдельные точки меры  $f$  должны возвращаться в исходное положение, однако они возвращаются не одновременно. Вместо этого траектории более плотно распределяются по всему  $M$ , поэтому действие  $f\Omega$  на интеграл стремится к действию  $\Omega/\int\Omega$ , и средние от функций по времени сходятся к средним по мере  $\Omega/\int\Omega$ .

В заключение приведем наиболее важные формулы дифференцирования и интегрирования на многообразиях:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\partial M} \omega, \\ d(\alpha_i \omega_i) &= \alpha_i d\omega_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \omega_i \in E_m, \\ \int \alpha_i \omega_i &= \alpha_i \int \omega_i, \\ d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-)^p \omega_1 \wedge d\omega_2, \\ \partial(M_1 \times M_2) &= \partial M_1 \times M_2 \cup M_1 \times (-)^{\dim M_1} \partial M_2, \\ d \circ d\omega &= 0, \quad \partial \partial M = \emptyset, \\ d\Phi_* \omega &= \Phi_* d\omega, \quad \int_{\Phi(M)} \Phi_* \omega = \int_M \omega, \\ \int_M L_X \omega &= 0, \quad \text{если } \Phi_t^X M = M. \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

Задачи (2.6.15)

- Докажите инвариантность меры Лиувилля  $dq_1 \wedge \dots \wedge dq_n \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n =: d^m q d^m p$  относительно точечных преобразований  $q \rightarrow \bar{q}$ .
- Рассмотрите подробно пример (2.6.7,2), изложив его так, чтобы определение интеграла можно было проследить шаг за шагом.

3. Докажите теорему:  $\oint_C dzf(z) = 0$ , если замкнутый контур интегрирования  $C$  лежит в той области, где  $f$  — мероморфная функция без полюсов первого порядка.
4. Докажите, что ориентируемость  $\Leftrightarrow$  существование атласа  $\bigcup_i (U_i, \Phi_i)$  с  $d_{ij} := \det D(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}) > 0 \forall i, j$ , для которых  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ .
5. Два  $C^\infty$ -отображения  $f, g : M \rightarrow N$  между двумя многообразиями называются диффеотопными, если существует  $C^\infty$ -отображение  $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$  с  $f = F \circ i_0, g = F \circ i_1$ , где  $i_0$  — вложение  $M \rightarrow \{0\} \times M$ .

Докажите, что если  $M$  и  $N$  — ориентируемые компактные  $n$ -мерные многообразия без края, то  $\forall \omega \in E_n(N)$

$$\int_M f^* \omega = \int_M g^* \omega$$

при условии, что  $f$  и  $g$  диффеотопны. (Докажите сначала, что  $\varphi$  — замкнутая форма  $\Rightarrow g^* \varphi - f^* \varphi$  — точная форма.)

6. Воспользуйтесь задачей (2.6.15,5) для доказательства теоремы “о невозможности гладко причесать ежа”: на  $S^n$ , четной размерности  $n$  каждое векторное  $C^\infty$ -поле  $X$  по крайней мере в одной точке обращается в нуль.
7. Уравнения гидродинамики

$$\dot{v}_i + v_k v_{i,k} = -p_{,i}$$

можно записать в виде

$$\dot{v} + L_v v = d \left( \frac{v^2}{2} - p \right)$$

(см. (2.5.14,5)), если рассматривать  $v$  как 1-форму в  $\mathbb{R}^3$ , а  $L_v$  — как производную Ли по  $v$ , причем с метрикой  $g_{ik} = \delta_{ik}$  ковариантное векторное поле  $v$  превращается в контравариантное. Поэтому для завихренности  $w = dv$  справедливо уравнение  $\dot{w} + L_v w = 0$ . Если в какой-то момент времени завихренность  $w$  всюду равна нулю, то докажите следующий интегральный вариант сохранения завихренности и во все последующие моменты времени: пусть  $C_t$  — замкнутая кривая, которая движется вместе с жидкостью со скоростью  $v$ , тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} v = 0 \quad (\text{теорема Томпсона}).$$

8. Докажите, что для бездивергентного векторного поля ( $E \in \mathcal{T}_0^1(\mathbb{R}^3), g_{ik} = \delta_{ik}, d^* E = 0$ ) напряженность поля  $\sim$  плотности силовых линий — это траекторий поля  $\Phi_t^E$ , такого, что поверхности  $N$  и  $\Phi_t^E N$  пронизаны одинаковым числом силовых линий, в силу чего (площадь поверхности)  $\times$  (плотность силовых линий) = const и для  $E \parallel df$ , где  $df$  — элемент поверхности, справедливо соотношение

$$\int_N {}^* E = \int_N \mathbf{E} df \sim \frac{\text{напряженность поля}}{\text{плотность силовых линий}}$$

Докажите инвариантность этого соотношения относительно  $\Phi_t^E$ .

### Решения (2.6.16)

$$d^m q = d^m \bar{q} \det \left( \frac{\partial q_i}{\partial \bar{q}_j} \right), \quad d^m p = d^m \bar{p} \det \left( \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial q_j} \right).$$

2. 1-Форму  $df$  требуется проинтегрировать по образу  $u(I)$  траектории  $u : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Воспользуемся для этого одномерного подмногообразия картой  $(u(I), u^{-1})$ . Тогда

$$\int_{u(I)} df = \int_I (u)^* df = \int_I d((u)^* f) = \int_I d(f \circ u) = \int_{\partial I} (f \circ u) = f(u(b)) - f(u(a)).$$

3. Из предположений вытекает, что

$$f(z) = \frac{\partial}{\partial z} F(z),$$

следовательно,

$$\int_C dz f(z) = \int_C dF = \int_{\partial C} F = 0,$$

так как для замкнутого контура  $\partial C = \emptyset$ .

4.  $\implies$ :  $\Phi_i$  необходимо выбрать так, чтобы в координатах  $(x_1, \dots, x_m) = \Phi_i(x)$  можно было записать

$$\Omega = g_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m, \quad g_i > 0.$$

Тогда

$$d_{ij} = g_j / g_i > 0.$$

$\Leftarrow$ : Выберем  $\omega_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$  на  $U_i$ ,  $x_k$  — как прежде, и построим  $\sum \omega_i f_i$ , где  $f_i$  — разложение единицы, как в (2.6.3). Пусть при заданном  $x \in M$   $I$  — множество тех  $i$ , для которых  $f_i(x) \neq 0$  и  $i_0 \in I$ . Тогда

$$\omega(x) = \sum_{i \in I} \left[ f_i(x) d_{i i_0}(x) \right] \omega_{i_0}(x) \neq 0,$$

так как, по предположению,  $f_i$  и  $d_{i i_0}(x) > 0$ .

5. Аналогично (2.5.14,7) определим отображение

$$K : E_{p+1}(I \times M) \rightarrow E_p(M) : \omega_0 + dt \wedge \omega_M \rightarrow \int_0^1 dt \wedge \omega_M.$$

Оно удовлетворяет соотношению

$$d \circ K + K \circ d = i_1^* - i_0^*.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d \circ K \circ F^* + K \circ F^* \circ d &= (d \circ K + K \circ d) F^* = (i_1^* - i_0^*) \circ F^* = \\ &= (F \circ i_1)^* - (F \circ i_0)^* = g^* - f^*. \end{aligned}$$

Если  $d\varphi = 0$ , то  $g^*\varphi - f^*\varphi = d \circ K \circ F^*\varphi$  — точная форма. Но тогда

$$\int_M (g^*\omega - f^*\omega) = 0,$$

поскольку  $n$ -форма  $\omega$  замкнута, а  $M$  — многообразие без края.

6. Представим, что  $S^n$  вложено в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 := \langle x|x \rangle = 1\}$$

и  $T(S^n)$  наделено соответствующей римановой структурой. Если

$$X(x) \neq 0 \quad \forall x \in S^n,$$

то  $X$  можно заменить на  $X/\|X\|$  и рассматривать как отображение  $S^n \rightarrow S^n$ .

Пусть  $F : [0, 1] \times S^n \rightarrow S^n$  задано отображением

$$(t, x) \rightarrow x \cos \pi t + X(x) \sin \pi t$$

(обратите внимание на то, что  $X(x) \perp x$ ). В результате получаем гомотопию между  $x \rightarrow x$  и  $x \rightarrow -x$  (отображение антиподов  $a$ ). Рассмотрим на  $S^n$  следующие  $n$ -формы: пусть в заданных вложении картах  $\{x_j \neq 0\}$

$$\omega_j = \frac{(-)^{j+1}}{x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_{n+1}.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i dx_i|_{S^n} = 0$$

( $|S^n$  означает ограничение на  $S^n$ ), то на  $S^n$  формы  $\omega_j$  совпадают и определяют на  $S^n$  форму объема  $\omega$ . Но  $a_*\omega = (-)^{n+1}\omega$ , поэтому

$$V(S^n) := \int_{S^n} \omega = \int_{S^n} a_*\omega = (-)^{n+1}V(S^n),$$

что невозможно при четном  $n$ .

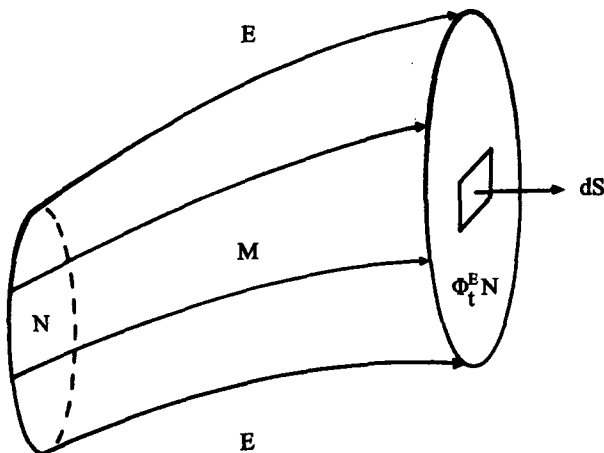


Рис. 2.15. Цилиндр, образованный силовыми линиями

7. Поскольку контур  $C_t$  плывет вместе с жидкостью, то получаем

$$\int_{C_{t+\tau}} v = \int_{C_t} e^{\tau L_v} v,$$

что дает вклад, равный  $\int_{C_t} L_v v$ , в производную по времени:

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} v = \int_{C_t} (\dot{v} + L_v v) = \int_{C_t} d \left( \frac{v^2}{2} - p \right) = 0.$$

8. Пусть  $M$  — цилиндр, натянутый на  $N$  и  $\Phi_t^E N$  (рис. 2.15). Тогда  $\partial M = N \cup \Phi_t^E N$  боковая поверхность и

$$0 = \int_M d^* E = \int_{\Phi_t^E N} {}^* E - \int_N {}^* E,$$

так как на боковой поверхности  $E \perp df$ .

### 3. Гамильтоновы системы

#### 3.1. Канонические преобразования

На кокасательном расслоении многообразия задается каноническая 2-форма. Диффеоморфизмы, которые оставляют ее инвариантной, называются каноническими преобразованиями.

Функция Лагранжа (2.3.23) определяет биективное отображение  $T(M) \rightarrow T^*(M) : \dot{q} \rightarrow p$ , соответствующий локальный поток на  $T^*(M)$  описывается уравнениями Гамильтона. Этот поток обладает особым свойством, так как он сохраняет симплектическую структуру кокасательного расслоения  $T^*(M)$ . Она задается канонической 2-формой, к определению которой сейчас перейдем.

##### Определение (3.1.1)

Пусть  $\Pi$  — проекция кокасательного расслоения  $T^*(M)$ , такая, что отображение  $T(\Pi)$  действует как  $T_0^1(T^*(M)) \rightarrow T_0^1(M)$ , и пусть  $\Theta \in E_1(T^*(M))$  определена соотношением  $(\Theta|v)(z) = (z|T(\Pi)(v(z))) \quad \forall z \in T^*(M)$  и  $v \in T_0^1(T^*(M))$ . Тогда 1-форма  $\Theta$  и ее дифференциал  $d\Theta =: \omega$  называются каноническими формами на  $T^*(M)$ .

##### Примечания (3.1.2)

1. На карте расслоения отображение  $T(\Pi)$  действует как  $\left(\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}\right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial q}$ . Если  $v$  принадлежит карте  $(q, p) \rightarrow \left(q, p; v^i \frac{\partial}{\partial q_i} + w^i \frac{\partial}{\partial p_i}\right)$ , то  $(\Theta|v)(q, p) = \sum_i p_i v^i(q, p)$ . Поэтому в смысле (2.4.3,2) можно записать, что  $\Theta = p_i dq^i$ ,  $\omega = dq^i \wedge dp_i$ . Форма  $\omega$  не только замкнута, но и не вырождена, и поэтому она определяет на  $T^*(M)$  симплектическую структуру.
2. Формы не зависят от карт, именно поэтому они и называются “каноническими”. Справедливо более общее утверждение: под действием диффеоморфизмов  $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$  и, следовательно,  $\Psi := T^*(\Phi) : T^*(M_1) \rightarrow T^*(M_2)$  канонические формы  $\Theta_{1,2}$  и  $\omega_{1,2}$  переходят друг в друга:  $\Psi_* \Theta_1 = \Theta_2$ ,  $\Psi_* \omega_1 = \omega_2$  (задача (3.1.13,8)).
3. Каноническая форма  $\Theta$  обращается в нуль в точке начала пространства  $T^*(M)$ ; что же касается канонической формы  $\omega$ , то она всегда отлична от нуля. Внешнее произведение  $p$  2-форм

$$\Omega_p := \frac{(-)^{(p-1)p/2}}{p!} \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega}_p$$

есть  $2p$ -форма, которая нигде не обращается в нуль. В частности, в некоторой карте расслоения  $\Omega := \Omega_m$  она равна  $dq_1 \wedge dq_2 \wedge \dots \wedge dq_m \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_m$  (мера Лиувилля). Вместе с  $\omega$  точными являются и все ее степени. Например,

$$\Omega = -\frac{(-)^{(m-1)m/2}}{m!} d(\Theta \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega).$$

Как видно, преобразования, индуцированные диффеоморфизмами многообразия  $M$  (так называемые **точечные преобразования**), оставляют канонические формы инвариантными. Однако естественно поставить вопрос о более общих преобразованиях на  $T^*(M)$ , при которых

новые  $q$  зависят от старых  $q$  и  $p$ , а формы  $\omega$  остаются инвариантными.

### Определение (3.1.3)

Диффеоморфизм  $T^*(M_1) \supset U_1 \xrightarrow{\Psi} U_2 \subset T^*(M_2)$ , который переводит каноническую 2-форму  $\omega_1|_{U_1}$  в  $\omega_2|_{U_2}$ , называется **локальным каноническим преобразованием**. Если  $U_i = T^*(M_i)$ , то  $\Psi$  называется (глобальным) **каноническим преобразованием**.

### Примечания (3.1.4)

1. Точечные преобразования являются каноническими.
2. Пример канонического преобразования, которое не является точечным: перестановка  $(q, p) \rightarrow (p, -q)$ , где  $T^*(M) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $M = \mathbb{R}$ ,  $\omega = dq \wedge dp$ .
3. Перестановка  $(q, p) \rightarrow (p, q)$  изменяет знак формы  $\omega$ , поэтому не каждое линейное преобразование является каноническим.
4. Так как  $(\Psi_1 \circ \Psi_2)_* = \Psi_{1*} \circ \Psi_{2*}$ , поэтому канонические преобразования образуют группу.
5. Поскольку  $\Psi_*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\Psi_*\omega_1) \wedge (\Psi_*\omega_2)$ , то канонические преобразования оставляют инвариантными  $2p$ -формы  $\Omega_p$ .

Что касается 1-формы  $\Theta$ , то она, вообще говоря, изменяется при канонических преобразованиях. Однако выполняется соотношение  $\Psi_*d\Theta - d\Theta = d(\Psi_*\Theta - \Theta) = 0$ , поэтому по крайней мере в некоторой окрестности  $U$  имеем  $\Psi_*\Theta = \Theta + d\bar{f}$ ,  $\bar{f} \in C^\infty(U)$ . Пусть на некоторой карте  $\Psi: (\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (q, p)$ . Тогда справедливо соотношение

$$p_i dq^i = \bar{p}_i d\bar{q}^i + d\bar{f} = -\bar{q}^i d\bar{p}_i + d\bar{f}, \quad f(\bar{q}, \bar{p}) = \bar{f}(\bar{q}, \bar{p}) + \bar{q}^i \bar{p}_i. \quad (3.1.5)$$

Если мы хотим вывести из (3.1.5) выражение для  $\Psi$ , то в (3.1.5) следует всюду использовать один и тот же базис. Если

$$\det \left( \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \right)_{\bar{p}=\text{const}} \neq 0,$$

как при точечном преобразовании, или когда  $\Psi$  достаточно близко к  $\mathbf{1}$ , то достаточно все выразить через  $dq^i$  и  $d\bar{p}_j$  и сравнить коэффициенты. В результате можем представить  $\bar{q}$  как функцию от  $q$  и  $\bar{p}$ , обратив функцию  $q(\bar{q}, \bar{p})$ . Обозначив  $f(\bar{q}(q, \bar{p}), \bar{p})$  также через  $f(q, \bar{p})$  и подставив в (3.1.5), придем к следующей лемме.

### Лемма (3.1.6)

Локальное каноническое преобразование  $\Psi: (\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (q, p)$  с

$$\det \left( \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \right)_{\bar{p}=\text{const}} \neq 0,$$

локально представимо в виде

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}, \quad \bar{q}^i = \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_i}, \quad f(q, \bar{p}) \in C^\infty.$$

Функция  $f$  называется **локальной производящей функцией**. Наоборот, если задана функция  $f(q, \bar{p}) \in C^\infty(U)$  с  $\det(\partial^2 f / \partial q^i \partial \bar{p}_j) \neq 0$ , то приведенное выше соотношение определяет локальное каноническое преобразование.



## Примечания (3.1.7)

## 1. Каноническое преобразование

$$q^i = \bar{p}_i, \quad p_i = -\bar{q}^i \quad \text{в} \quad T^*(M) = \mathbb{R}^{2m}$$

не может быть порождено таким способом. Конструкция не проходит, так как  $\frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^i} |_{\bar{p}} = 0$ .

2. Если  $\det(\partial q^i / \partial p_j) \neq 0$ , то функция  $\bar{p}(q, \bar{q})$  может быть вычислена локально. Подставляя в  $\bar{f}$ , получаем альтернативную форму

$$p_i = \frac{\partial \bar{f}}{\partial q^i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}^i}.$$

Точечные преобразования не представимы в таком виде. Ясно, что  $\bar{f}$  аддитивна относительно композиции преобразований и  $\bar{f}_1 \circ \Psi_2^{-1} + \bar{f}_2$  порождает  $\Psi_2 \circ \Psi_1$ .

3. Из теории интегрирования (см. параграф 2.6) известно, что интегралы от  $\omega$  и  $\Omega$  остаются инвариантными при канонических преобразованиях  $\Psi$ , причем интегрирование должно проводиться по образу области интегрирования

$$\int_N \omega = \int_{\Psi N} \omega, \quad \int_U \Omega = \int_{\Psi U} \Omega,$$

где  $N$  — двумерное, а  $U$  —  $2m$ -мерное подмногообразие в  $M$ . Относительно  $\Theta$  ничего подобного утверждать нельзя. Но если  $C$  — одномерное подмногообразие без края в окрестности, в которой выполняется (3.1.5), т.е. если  $C$  — достаточно малая замкнутая кривая<sup>11</sup>, то

$$\int_{\Psi^{-1}C} \Theta = \int_C \Theta + \int_{\partial C} \bar{f} = \int_C \Theta.$$

Но для произвольной замкнутой кривой это соотношение может быть неверным (задача (3.1.13,6)).

4. Следует отличать производящие функции конечного преобразования от производящего векторного поля группы преобразований. Связь между производящими функциями, с одной стороны, и производящими векторными полями — с другой, рассмотрим в (3.2.9).

## Примеры (3.1.8)

1.  $p = \sqrt{2\omega\bar{p}} \cos \bar{q}$ ,  $q = \sqrt{2\bar{p}/\omega} \sin \bar{q}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^+$ , — локальное каноническое преобразование, отображающее  $\mathbb{R}^+ \times T \subset T^*(T)$  на  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset T^*(\mathbb{R})$ . Как показывают вычисления,

$$dp = \frac{1}{2} d\bar{p} \cos \bar{q} \sqrt{2\omega/\bar{p}} - d\bar{q} \sqrt{2\omega\bar{p}} \sin \bar{q}, \quad dq = \frac{1}{2} d\bar{p} \sqrt{2/\omega\bar{p}} \sin \bar{q} + d\bar{q} \sqrt{2\bar{p}/\omega} \cos \bar{q},$$

поэтому

$$dq \wedge dp = d\bar{q} \wedge d\bar{p}.$$

Ясно, что это локальное каноническое преобразование не может быть продолжено до канонического преобразования  $T^*(T) \rightarrow T^*(\mathbb{R})$ .

<sup>11</sup>  $\omega$  и  $\Omega$  называются **интегральными инвариантами**, а  $\Theta$  — **относительным интегральным инвариантом**.

2. Выясним, когда линейное преобразование в  $T^*(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{2m}$  является каноническим. Для этого объединяем  $(q^1, \dots, q^m, p_1, \dots, p_m)$  в вектор  $(x_1, \dots, x_{2m})$  и записываем

$$\omega = dx_i W_{ik} dx_k,$$

$$W = \frac{1}{2} \begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \\ \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ 0 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

линейное преобразование  $x_k = L_{kj} \bar{x}_j$  является каноническим, если  $L^t W L = W$ , т.е. если  $L$  — симплектическая матрица. Так как  $\det W \neq 0$ , то должно выполняться равенство  $\det L = \pm 1$ . Как вещественная матрица,  $L$  имеет комплексно сопряженные собственные значения. Кроме того, можно показать (задача (3.1.13,4)), что вместе с  $\lambda$  собственными значениями симплектической матрицы  $L$  являются также  $1/\lambda$ ,  $\lambda^*$  и  $1/\lambda^*$ . Поэтому, при  $\det L = 1$ , симплектическое преобразование сохраняет объем: если  $L$  растягивает в одном направлении, то в другом —  $L$  сжимает.

Каноническая 2-форма всюду представлена обратимой матрицей  $W$ . Поэтому  $\omega$ , так же, как и  $g$  из (2.4.12,2), задает невырожденную билинейную форму и тем самым биективное отображение из  $T_1^0(T^*(M))$  на  $T_0^1(T^*(M))$ .

**Определение (3.1.9)**

Пусть  $\omega$  через  $i_{b\nu}\omega = \nu$  задает биективное отображение

$$T_1^0(T^*(M)) \xrightarrow{b} T_0^1(T^*(M)).$$

Тогда векторное поле  $X_H := b(dH)$ ,  $H \in C^\infty(T^*(M))$  называется гамильтоновым, а если функция  $H$  определена только локально, то  $X_H$  называется локально гамильтоновым.

**Примечания (3.1.10)**

1. Наглядно действие  $b$  можно представить с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} T_0^1(T^*(M)) \times T_0^1(T^*(M)) & & \\ & \searrow \omega & \\ & & C^\infty(T^*(M)) \\ & \nearrow (1) & \\ T_1^0(T^*(M)) \times T_0^1(T^*(M)) & & \end{array}$$

$b \times 1 \uparrow$

2. На карте  $b(v_{q^i} dq^i + v_{p_i} dp_i) = v_{p_i} \partial q^i - v_{q^i} \partial p_i$ ,

$$X_H : (q, p) \rightarrow \left( q, p; \frac{\partial H}{\partial p_i} \partial q^i, -\frac{\partial H}{\partial q_i} \partial p_i \right).$$

Векторное поле  $X_H$  имеет именно такой вид, какой имеет векторное поле в (2.3.21).

3. Разницу между гамильтоновым и локально гамильтоновым векторными полями, определенными в (3.1.9), нетрудно проиллюстрировать на примере. Пусть  $M = T^1$ ,  $T^*(M) = T^1 \times \mathbb{R} \ni (\varphi, p)$  и  $X$  — заданное на  $T^*(M)$  векторное поле  $(\varphi, p) \rightarrow (\varphi, p; 0, 1)$ . Оно локально гамильтоново ( $H = -\varphi$ ), но не гамильтоново, так как переменная  $\varphi$  не определена глобально.
4. Наши определения не зависят от карт, но в других координатах они могут утратить свое тождество, определяемое формой  $\omega$ . Но для канонического преобразования  $\Psi$  справедливо соотношение  $\Psi_* \circ b = b \circ \Psi_*$ , так как  $\Psi_* \omega = \omega$ . Следовательно,

$$\Psi_* X_H = b \Psi_* dH = bd(H \circ \Psi^{-1}) = X_{H \circ \Psi^{-1}}.$$

Практически это означает, что в новой системе координат уравнения Гамильтона получаются путем замены переменных в  $H$ . Кроме того,  $\omega$  позволяет определить отображение

$$C^\infty(T^*(M)) \times C^\infty(T^*(M)) \rightarrow C^\infty(T^*(M)),$$

если подействовать  $\omega$  на векторные поля, ассоциируемые с двумя функциями.

#### Определение (3.1.11)

**Скобками Пуассона** двух функций  $F$  и  $G \in C^\infty(T^*(M))$  называется величина

$$\{G, F\} := \omega(X_G, X_F) = i_{X_F} i_{X_G} \omega = i_{X_F} dG = L_{X_F} G = -L_{X_G} F.$$

#### Примечания (3.1.12)

1. Антисимметрия формы  $\omega$  приводит к антисимметрии скобок Пуассона:  $\{G, F\} = -\{F, G\}$ , откуда и следует последнее равенство в определении (3.1.11).
2. В карте расслоения имеем

$$\{G, F\} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right),$$

в частности,  $\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ ,  $\{q^i, p_j\} = \delta_{ij}$ .

3. Скобки Пуассона инвариантны относительно канонического преобразования  $\Psi$  в том смысле, что преобразованные к новой системе они просто переходят в скобки Пуассона преобразованных функций. Из (3.1.10,4) вытекает, что  $\{F, G\} \circ \Psi = \{F \circ \Psi, G \circ \Psi\}$ . Наоборот, если  $\Psi$  — диффеоморфизм пространства  $T^*(M)$ , удовлетворяющий этому соотношению при всех  $F, G \in C^\infty(T^*(M))$ , то  $\Psi$  — каноническое преобразование. Выбирать следует только такие функции, которые в области карты совпадают с  $q^i, p_i$ ;  $q^i \circ \Psi =: \bar{q}^i$ ,  $p_i \circ \Psi =: \bar{p}_i$  — преобразованные координаты, удовлетворяющие соотношениям

$$\{\bar{q}^i, \bar{p}_j\} = \delta_{ij}, \quad 0 = \{\bar{q}^i, \bar{q}^j\} = \{\bar{p}_i, \bar{p}_j\}.$$

Поэтому  $\omega = d\bar{q}^i \wedge d\bar{p}_i$  и  $\Psi$  — каноническое преобразование.

4. Из правил (2.2.24) для производных Ли следует

$$\{F + G, H\} = \{F, H\} + \{G, H\}, \quad \{F \cdot G, H\} = G\{F, H\} + F\{G, H\}.$$

#### Задачи (3.1.13)

1. Найдите производящую функцию  $\bar{f}$  для локального канонического преобразования  $q = \sqrt{2\bar{p}/\omega} \sin \bar{q}$ ,  $p = \sqrt{2\omega\bar{p}} \cos \bar{q}$ .

2. Вычислите  $\{e^{\alpha q}, e^{\beta p}\}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
3. Запишем матрицу  $L$  линейного канонического преобразования (3.1.8,2) в блочном виде

$$L = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

При каких условиях  $L$  — симплектическая матрица, и какая производящая  $\bar{f}$  порождает преобразование?

4. Пусть  $\lambda$  — собственное значение симплектической матрицы  $L$ . Докажите, что  $1/\lambda$  (равно как  $\lambda^*$  и  $1/\lambda^*$ ) — также собственное значение. Пусть  $L$  — элемент однопараметрической группы  $L = e^{tF}$ , порожденной функцией  $F$ . Что можно сказать о собственных значениях  $F$ ?
5. Рассмотрим поток, индуцированный на  $T^*(M)$  каноническим векторным полем  $b\Theta$ . Является ли он каноническим?
6. Постройте каноническое преобразование  $\Psi$ , для которого  $\Psi_*\Theta \neq \Theta + d\bar{f}$  и поэтому  $\int_C \Theta \neq \int_{\Psi C} \Theta$  для замкнутой кривой  $C$ .
7. Как выглядит производящая функция  $f$  (см. (3.1.5)) точечного преобразования  $\Psi = T^*(\Phi)$ ,  $q \rightarrow \bar{q}(q)$ ?
8. Докажите, что для точечного преобразования  $\Psi = T^*(\Phi)$ , где  $\Phi$  — диффеоморфизм многообразия  $M$ , имеем  $\Psi_*\Theta = \Theta$  (поэтому  $\Psi_*\omega = \omega$ ,  $\Psi_*\Omega = \Omega$ ). Является ли  $\Psi$  самым общим локальным каноническим преобразованием, оставляющим инвариантной форму  $\Theta$ , с областью, содержащей подмногообразие  $\bar{p}_i = 0$ ?

### Решения (3.1.14)

1.  $\bar{f} = \bar{p} \cos \bar{q} \sin \bar{q}$ . Тогда

$$pdq = \sqrt{2\omega\bar{p}} \cos \bar{q} \{d\bar{p}\sqrt{1/2\omega\bar{p}} \sin \bar{q} + d\bar{q}\sqrt{2\bar{p}/\omega} \cos \bar{q}\} = \bar{p}d\bar{q} + d(\bar{p} \cos \bar{q} \sin \bar{q}).$$

Обратите внимание, что производящая функция  $\bar{f}$  задана на  $T(S^1)$  глобально, но порождает только локальное каноническое преобразование.

2.

$$\begin{aligned} \{e^{\alpha q}, p\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \{q^n, p\} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} q^n = \alpha e^{\alpha q}, \\ \{e^{\alpha q}, p^m\} &= p^{m-1} \{e^{\alpha q}, p\} + \{e^{\alpha q}, p^{m-1}\} p = m\alpha p^{m-1} e^{\alpha q}, \\ \{e^{\alpha q}, e^{\beta p}\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \{e^{\alpha q}, p^m\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} \alpha \beta e^{\alpha q} p^m = \alpha \beta e^{\alpha q + \beta p}. \end{aligned}$$

3.  $A^t C$  и  $B^t D$  должны быть симметричными и удовлетворять равенству  $A^t D - C^t B = \mathbf{1}$ ,

$$\bar{f} = \bar{p} B^t C \bar{q} + \frac{1}{2} (\bar{q} C^t A \bar{q} + \bar{p} D^t B \bar{p}).$$

4.  $\det(L^{-1} - \lambda) = \det(W^{-1} L^T W - \lambda) = \det(L^T - \lambda) = \det(L - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$  — собственное значение матрицы  $L^{-1}$ . Поэтому вместе с  $\varphi$  собственными значениями преобразования  $F$  являются  $-\varphi$ ,  $\varphi^*$  и  $-\varphi^*$ .
5. Векторное поле  $b\Theta = -p_i \partial / \partial p_i$  порождает поток  $q^i(t) = q^i(0)$ ,  $p_i(t) = e^{-t} p_i(0)$ , но не задает никаких канонических преобразований. Оно характеризует структуру расслоения  $T^*(M)$ : линии тока служат слоями, а неподвижные точки — базисом.
6.  $M = T^1$ ,  $T^*(M) = T^1 \times \mathbb{R}$ ,  $\Psi : (\varphi, p) \rightarrow (\varphi, p+a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  для обеих карт (2.1.7,2) на  $T^1$ . Локально  $\bar{f} = a\varphi$ , но  $\varphi \notin C^\infty(T^*(M))$ . Поэтому для  $C : t \in [0, 2\pi) \rightarrow (t, p) \in T^*(M)$  имеем

$$\int_C \Theta = 2\pi p \neq \int_{\Psi C} \Theta = 2\pi(p+a).$$

Подчеркнем, что  $C$  — не край компактной поверхности. Если бы пространство  $T^1$  было вложено в  $\mathbb{R}^2$ , то кривая  $C$  была бы границей круга  $D$ , и можно было бы прийти к неверному заключению:

$$\int_C \Theta = - \int_D \omega = - \int_{\Psi D} \omega = \int_{\Psi C = \partial \Psi D} \Theta.$$

Дело в том, что форма  $\Theta$  имела бы в нуле особенность, а круг с выколотым центром не был бы компактным множеством. Это — не только математический трюк. Особенность в нуле проявляется в квантовой теории эффекта Аронова – Бома, т.е. приводит к наблюдаемым последствиям.

7.  $f(\bar{p}, q) = \bar{p}_i \bar{q}^i(q).$

8. Из решения (3.1.14,7) мы знаем, что  $f = \bar{p}_i \bar{q}^i(q)$ , следовательно,  $\bar{f} = 0$ ,  $\Psi_* \Theta = \Theta$ . Наоборот, если форма  $\Theta$  инвариантна, то  $f = \bar{p}_i \bar{q}^i(q, \bar{p})$ . Из (3.1.6) знаем, что  $\bar{q}^i = \partial f / \partial \bar{p}_i$ , поэтому  $f = \bar{p}_i \partial f / \partial \bar{p}_i$ . Следовательно,  $f$  — однородная функция степени 1 относительно переменных  $\bar{p}_i$ . Если  $\bar{p}_i = 0$  принадлежит области определения функции  $f$ , то  $f$  должна быть линейной. Таким образом,  $\bar{q}^i$  зависит только от  $q^i$ .

### 3.2. Уравнения Гамильтона

*Гамильтоновы векторные поля порождают локальные потоки, которые оставляют инвариантной форму  $\omega$ . Эти потоки задаются уравнениями Гамильтона.*

Локальный поток  $\Psi_t$  на  $T^*(M)$ , оставляющий инвариантной форму  $\omega$ , т.е.  $\Psi_t^* \omega = \omega$ , порождает векторное поле  $X$ , удовлетворяющее соотношению  $L_X \omega = 0$ . Оказывается, что гамильтоново векторное поле  $X_H$  (см. (3.1.9)),  $H \in C^\infty(T^*(M))$ , обладает именно этими свойствами. Если вспомнить, что отображение, обратное биективному отображению (3.1.9),  $T_0^1(T^*(M)) \xrightarrow{b^{-1}} T_1^0(T^*(M))$ , есть именно отображение  $X \rightarrow i_X \omega$  (2.4.33), то можно записать  $dF = i_{X_F} \omega$ . Из (2.5.9,4), в силу того что  $d\omega = -dd\Theta = 0$ , получаем

$$L_{X_F} \omega = di_{X_F} \omega = ddF = 0. \quad (3.2.1)$$

Локально возможно доказать и обратное, так как

$$0 = L_X \omega = di_X \omega \Rightarrow i_X \omega = dF, \quad F \in C^\infty(T^*(M)) \Rightarrow X = X_F.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

#### Теорема (3.2.2)

*Каждое локальное гамильтоново векторное поле порождает локальный поток канонического преобразования. Наоборот, любой локальный поток канонического преобразования имеет локальную гамильтонову производящую функцию.*

#### Примечание (3.2.3)

Приведенное выше утверждение становится ложным, если опустить слово “локальный”. Гамильтоново векторное поле не обязательно должно быть полным, даже если функция Гамильтона  $H$  определена глобально. Наоборот, поток  $\Psi_t : (\varphi, p) \rightarrow (\varphi, p + t)$ , заданный на  $T^*(S^1) = S^1 \times \mathbb{R}$  имеет лишь локально определенную производящую функцию  $\varphi$  (см. (3.1.10,3)).

• Подкреем полученные выше результаты следующим определением.

#### Определение (3.2.4)

*Для всех  $H \in C^\infty(T^*(M))$  уравнения Гамильтона  $\dot{i} = X_H$  ои определяют канонический*

поток  $\Phi_t$ . Пара  $(M, \Phi_t)$  называется гамильтоновой системой.

### Примечания (3.2.5)

1. Изменение наблюдаемых во времени определяется скобками Пуассона с функцией Гамильтона  $H$ :

$$\frac{d}{dt} F \circ \Phi_t = \{F \circ \Phi_t, H\}.$$

2. Как следует из (3.1.10,4), уравнения Гамильтона инвариантны относительно канонических преобразований  $\Psi$  в том смысле, что в новой системе необходимо лишь взять преобразованную функцию Гамильтона  $H$ . Поясним сказанное более подробно. Пусть  $\Psi : (\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (q(\bar{q}, \bar{p}), p(\bar{q}, \bar{p}))$ . Обозначим  $H_T(q, p) = H(\bar{q}(q, p), \bar{p}(q, p))$ . Тогда уравнения

$$\ddot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, \quad \dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}^i} \quad \text{и} \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H_T}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_T}{\partial q^i}$$

эквивалентны.

3. Вследствие антисимметрии скобок Пуассона функция Гамильтона  $H$  постоянна во времени. По той же причине постоянна во времени и любая величина, порождающая локальный канонический поток, который не изменяет  $H$ .
4. Эволюция во времени оставляет инвариантными не только  $\omega$ , но и (вследствие (3.1.4,5)) объем фазового пространства  $\Omega$ . (Это утверждение называется теоремой Лиувилля. В рамках классической механики доказательство теоремы Лиувилля требует определенных усилий; современные же понятия сформулированы таким образом, что доказывать по существу становится нечего.)
5. Если  $H$  и  $F$  — аналитические функции и  $X_H$  — полное векторное поле, то, следуя замечанию (2.3.11,2), канонический поток можно записать в виде

$$F \circ \Phi_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{\{\dots\{F, H\}H\dots\}}_n.$$

### Примеры (3.2.6)

1. Каноническое преобразование (3.1.8,1) преобразует функцию Гамильтона осциллятора

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \quad \text{в} \quad H_T = \bar{p}\omega.$$

В этих координатах эволюция системы во времени описывается следующим образом:  $\bar{p} = \text{const}$ ,  $\bar{q}(t) = \bar{q}(0) + \omega t$ . В старых координатах мы имели

$$p(t) = \sqrt{2\omega\bar{p}} \cos(\bar{q}(0) + \omega t) \quad \text{и} \quad q(t) = \sqrt{2\bar{p}/\omega} \cdot \sin(\bar{q}(0) + \omega t).$$

Эти выражения в точности совпадают с решением уравнений для  $p$  и  $q$  с функцией Гамильтона  $H$ . Заметим следующее:

- (i) эволюция во времени представляет собой вращение фазового пространства  $(q, p)$  и поэтому оставляет инвариантным объем в фазовом пространстве;
- (ii) это каноническое преобразование можно использовать, хотя только локально, потому, что оно отображает одни инвариантные во времени области в другие.

2. При  $M = \mathbb{R}^3$ ,  $T^*(M) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $H = |\mathbf{p}|^2$ ,  $G_1 = p_1$ ,  $X_{G_1}$  порождает каноническое преобразование  $(q_1, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3) \rightarrow (q_1 + \lambda, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3)$ , которое оставляет инвариантной функцию Гамильтона  $H \Leftrightarrow G_1 = \text{const}$  (сохранение импульса при свободном движении).
3. При значениях  $M$ ,  $H$ , как в примере (3.2.6,2),  $G_2 = p_1 q_2 - q_1 p_2$ ,  $X_{G_2}$  порождает каноническое преобразование

$$(q_1, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3) \rightarrow (q_1 \cos \lambda + q_2 \sin \lambda, -q_1 \sin \lambda + \\ + q_2 \cos \lambda, q_3; p_1 \cos \lambda + p_2 \sin \lambda, -p_1 \sin \lambda + p_2 \cos \lambda, p_3),$$

которое оставляет инвариантной функцию Гамильтона  $H \Leftrightarrow G_2 = \text{const}$  (сохранение углового момента (момента импульса) при свободном движении).

То, что гамильтоновы векторные поля порождают (локальные) канонические преобразования, позволяет установить связь между скобками Ли и Пуассона.

### Теорема (3.2.7)

Скобки Ли (2.5.9,6) двух гамильтоновых векторных полей есть гамильтоново векторное поле скобок Пуассона:

$$[X_H, X_G] = X_{\{G, H\}}.$$

### Доказательство

Гамильтоново векторное поле  $X_H$  порождает локальный поток  $\Psi_t$ . Дифференцируя по времени соотношение  $\Psi_t^* X_G = X_{G \circ \Psi_t}$  при  $t = 0$ , получаем (с учетом (2.5.7))  $L_{X_H} X_G = X_{L_{X_H} G}$ . Но  $L_{X_H} X_G = [X_H, X_G]$ , а  $L_{X_H} G = \{G, H\}$ .  $\square$

### Примечания (3.2.8)

1. Связь между скобками Ли и Пуассона наглядно можно интерпретировать как коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} T_0^1(T^*(M)) \times T_0^1(T^*(M)) & \xrightarrow{\parallel} & T_0^1(T^*(M)) \\ b \circ d \times b \circ d \uparrow & & \uparrow b \circ d \\ C^\infty(T^*(M)) \times C^\infty(T^*(M)) & \xrightarrow{-\{\}} & C^\infty(T^*(M)) \end{array}$$

2. Как скобки Ли, так и скобки Пуассона не ассоциативны, а удовлетворяют тождеству Якоби

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = \\ = L_{X_F}(L_{X_G} H) - L_{X_G}(L_{X_F} H) + L_{X_{\{F, G\}}} H = (L_{[X_F, X_G]} + L_{X_{\{F, G\}}}) H = 0$$

(см. (2.5.9,6)).

3. Потoki, оставляющие инвариантной функцию Гамильтона  $H$ , образуют группу, центр которой содержит эволюцию во времени. Если скобки Пуассона  $\{K_i, K_j\}$  не могут быть выражены через  $K_i$ , то эта группа должна содержать дополнительные постоянные. Так, из примечания (3.2.8,2) следует, что скобки Пуассона двух постоянных сами также являются постоянной, поскольку

$$\{G, H\} = \{F, H\} = 0 \Rightarrow \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

Отсюда видно, что в примерах (3.2.6,2) и (3.2.6,3)  $\{G_1, G_2\} = p_2$  — постоянная.

Попытаемся теперь вывести производящую функцию  $\bar{f}_t$  группы канонических преобразований  $\Phi_t$  из породившего их векторного поля. Для этого рассмотрим конечное преобразование  $\Phi_t$  как композицию многих инфинитезимальных преобразований

$$\Phi_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\Phi_{t/n} \circ \Phi_{t/n} \circ \dots \circ \Phi_{t/n}}_n,$$

и вспомним, что производящие функции аддитивны относительно композиции отображений (3.1.7,2). Записав  $\Phi_{t/n}$  в виде  $\exp(\frac{t}{n} L_{X_H})$ , увидим, что при  $n \rightarrow \infty$  это преобразование переводит  $\Theta$  в  $\Theta + \frac{t}{n} d(-H + i_{X_H} \Theta)$ , так как

$$L_{X_H} \Theta = i_{X_H} d\Theta + di_{X_H} \Theta \quad \text{и} \quad dH = i_{X_H} \omega = -i_{X_H} d\Theta.$$

На карте расслоения

$$i_{X_H} \Theta = \sum_i p_i (dq^i | X_H) = \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

поэтому при бесконечно малом  $t$  производящая функция  $i_{X_H} \Theta - H$  оказывается функцией Лагранжа  $\mathcal{L}$ , определенной в (2.3.23). В пределе при  $n \rightarrow \infty$  сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{n} \mathcal{L} \circ \Phi_{tk/n}$$

переходит в интеграл, а именно в действие, введенное в (2.3.16).

Генератор канонического потока (3.2.9)

Локально выполняется соотношение

$$\Phi_t^* \Theta = \Theta + d\bar{f}_t,$$

где

$$\Phi_t : (q(0), p(0)) \rightarrow (q(t), p(t)) \quad \text{и} \quad \bar{f}_t = W(q(0), p(0), t) = \int_0^t dt' \mathcal{L}(q(t'), p(t')).$$

Пояснение

Функцию Лагранжа рассматриваем здесь как функцию на  $T^*(M)$ , что возможно вследствие диффеоморфизма  $T^*(M) \leftrightarrow T(M)$  (2.4.32,3):

$$\mathcal{L} = \sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H.$$

Разумеется,  $\mathcal{L}$  можно было бы выразить через  $q$  и  $\dot{q}$ ; в любом случае интегрирование производится по пути, проходящему через  $(q(0), p(0))$ .

Примечания (3.2.10)

- $\bar{f}_t$  — набор зависящих от  $t$  производящих функций преобразования  $(q(0), p(0)) \rightarrow (q(t), p(t))$ , которое кратко запишем в виде  $(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (q, p)$ . При этом производящие функции  $\bar{f}_t$  окажутся представленными в виде функций от  $(\bar{q}, \bar{p})$ , хотя, как и в (3.1.7,2), удобнее воспользоваться переменными  $\bar{q}$  и  $q$ . Если  $\det(\partial q^i / \partial \bar{p}_j)|_{\bar{q}} \neq 0$ , то начальный импульс



можно рассматривать как функцию  $\bar{p}(\bar{q}, q, t)$ . Если ввести  $W(\bar{q}, q, t) = \bar{f}(\bar{q}, \bar{p}(\bar{q}, q, t), t)$  как функцию действия, тогда согласно (3.1.7,2), имеем

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}^i}.$$

Итак, зависимость от времени осуществляется следующим образом. Взятие частной производной при фиксированных  $\bar{q}$  и  $q$  дает

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}_i} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial t},$$

где  $\bar{p}_i$  означает  $\bar{p}_i(\bar{q}, q, t)$ . Поскольку начальные условия не зависят от времени, то получаем

$$\frac{\partial \bar{p}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^j} \frac{dq^j}{dt} = 0.$$

Наконец, так как

$$\frac{\partial W}{\partial q^j} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{p}_i} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial q^j},$$

то заключаем, что

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L - p_j \frac{dq^j}{dt} = -H.$$

Записанное в координатах это уравнение означает, что действие удовлетворяет уравнению в частных производных Гамильтона — Якоби (с  $H(q^i, p_j)$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} W(\bar{q}, q, t) + H\left(q^i, \frac{\partial}{\partial q^j} W(\bar{q}, q, t)\right) = 0. \quad (3.2.11)$$

Таким образом, уравнения (3.2.4) эквивалентны уравнениям в частных производных (3.2.11).

2. Все приведенные выше соображения локальны. В частности, они показывают, что локальные решения уравнений Гамильтона-Якоби существуют. Вопрос о существовании глобальных решений представляет собой проблему совершенно другой степени трудности.

Во многих случаях время целесообразно вводить как зависимую переменную. При этом в формализм надлежит внести следующие изменения.

#### Определение (3.2.12)

Назовем  $M_e := M \times \mathbb{R}$  расширенным конфигурационным, а  $T^*(M_e)$  расширенным фазовым пространством. Пусть  $(t, -E)$  — координаты во втором множителе, так что канонической 1-формой в  $T^*(M_e)$  становится  $\Theta_e = p_i dq^i - E dt$ ,

$$\mathcal{H} := H(p, q; t) - E \in C^\infty(T^*(M_e)),$$

которая порождает локальный канонический поток (с параметром  $s$ ) с гамильтоновыми уравнениями (3.2.4) и соотношениями:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dE}{ds} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3.2.13)$$

## Примечания (3.2.14)

1.  $\mathcal{H}$  — постоянная, и можем ограничиться подмногообразием  $\mathcal{H} = 0$ . На этом многообразии  $E = H$ , т.е. равна энергии.
2.  $H$  может явно зависеть от  $t$ , а из второго уравнения (3.2.13) следует, что энергия сохраняется только в том случае, если функция Гамильтона  $H$  остается инвариантной относительно сдвига по времени  $t \rightarrow t + c$ .
3. Инвариантность уравнений движения относительно сдвига по времени не имеет отношения к сохранению энергии. Например, уравнение осциллятора с затуханием  $\ddot{x} = -\mu\dot{x} - \omega^2 x$  инвариантно относительно сдвига по времени, но энергия не сохраняется, поскольку соответствующая функция Гамильтона

$$H = e^{-\mu t} \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} e^{\mu t}$$

явно зависит от  $t$ .

4. Если включен потенциал  $H = H_0 + V(q) e^{\alpha t}$ , то он приводит к изменению энергии от  $t = -\infty$  до 0:

$$\delta E = \int_{-\infty}^0 \alpha ds e^{\alpha s} V(q(s)).$$

Последняя величина называется **средним от  $V$  в смысле Чезаро**.

5. Из первого уравнения (3.2.13) следует, что  $t$  с точностью до постоянной совпадает с  $s$ , но зависящие от времени преобразования координат, например, переход к ускоренной системе отсчета, в  $M_e$  являются точечными преобразованиями.
6. Для некоторых целей желательно выбирать  $s \neq t$  (см. (1.1.6), (1.1.4)). Например, функция Гамильтона  $\mathcal{H} = f(q, p)(H(q, p) - E)$ , где  $f > 0$ , приводит к уравнениям

$$\frac{dq}{ds} = f H_{,p} + f_{,p}(H - E), \quad \frac{dp}{ds} = -f H_{,q} - f_{,q}(H - E), \quad \frac{dt}{ds} = f.$$

На инвариантной поверхности  $\mathcal{H} = 0$  эти уравнения эквивалентны уравнениям (2.3.21). Таким образом, если решать канонические уравнения методом факторизации, то после выделения множителя из  $H$  эти уравнения дают решение задачи для параметра, отличного от  $t$ . Прежде всего они позволяют получить траектории, а для определения эволюции во времени останется только проинтегрировать уравнение  $dt/ds = f(q(s), p(s))$ .

## Примеры (3.2.15)

1. Свободное падение:  $M = \mathbb{R}$ ,  $M_e = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{H} = p^2/2 + gx - E$ .

а) Прежде всего можно было бы подумать о том, чтобы перейти в сопутствующую систему координат (падающую вместе с исследуемой физической системой). Преобразование

$$\Phi : x = \bar{x} - \frac{g}{2} \bar{t}^2, \quad t = \bar{t}$$

есть точечное преобразование в  $M_e$  и вместе с

$$T_{(\bar{x}, \bar{t})}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & -g\bar{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{(\bar{x}, \bar{t})}(\Phi)^{t-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g\bar{t} & 1 \end{pmatrix}$$

порождает каноническое преобразование  $T^*(\Phi)$ :

$$(x, t; p, -E) = \left( \bar{x} - \frac{g}{2} \bar{t}^2, \bar{t}; \bar{p}, -\bar{E} + g\bar{t}\bar{p} \right) : \mathcal{H} = \frac{\bar{p}^2}{2} + g \left( \bar{x} + \bar{p}\bar{t} - \frac{g}{2} \bar{t}^2 \right) - \bar{E}.$$

Получаем заведомо эквивалентные уравнения движения, но не достигаем никакого реального продвижения.

б) Если хотим отделить влияние гравитационного поля  $g$ , то можно воспользоваться следующим каноническим преобразованием, которое на  $M_e$  совпадает с приведенным выше преобразованием  $\Phi$ , но на слое  $(p, -E)$  действует иначе:  $(x, t; p, -E) = \left( \bar{x} - \frac{g}{2} \bar{t}^2, \bar{t}; \bar{p} - g\bar{t}, -\bar{E} + g(\bar{t}\bar{p} - \bar{x}) \right) : \mathcal{H} = \frac{\bar{p}^2}{2} - \bar{E}$ . В этих координатах получаем свободное движение в отсутствие гравитации.

в) С помощью канонического преобразования система может быть приведена к равновесию, в котором все ее параметры, кроме времени  $t$ , становятся постоянными:

$$(x, t; p, -E) = \left( \bar{x} + \bar{p}\bar{t} - \frac{g}{2} \bar{t}^2, \bar{t}; \bar{p} - g\bar{t}, -\bar{E} - g\bar{x} - \frac{\bar{p}^2}{2} \right) : \mathcal{H} = -\bar{E}.$$

Таким образом,  $\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{p}} = \dot{\bar{E}} = 0$ ,  $s = \bar{t} = t$  (см. (2.3.12)).

2. **Вращающаяся система.**  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $M_e = \mathbb{R}^3$  :  $\mathcal{H} = |\mathbf{p}|^2/2 + V(|\mathbf{x}|) - E$ . С помощью канонического преобразования (при ортогональных преобразованиях  $x$  и  $p$  трансформируются одинаково)

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \cos \omega \bar{t} + \bar{y} \sin \omega \bar{t}, & p_x &= \bar{p}_x \cos \omega \bar{t} + \bar{p}_y \sin \omega \bar{t}, \\ y &= -\bar{x} \sin \omega \bar{t} + \bar{y} \cos \omega \bar{t}, & p_y &= -\bar{p}_x \sin \omega \bar{t} + \bar{p}_y \cos \omega \bar{t}, \\ t &= \bar{t}, & E &= \bar{E} - \omega(\bar{x}\bar{p}_y - \bar{y}\bar{p}_x), \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\mathcal{H} = \frac{|\bar{\mathbf{p}}|^2}{2} + \omega(\bar{x}\bar{p}_y - \bar{y}\bar{p}_x) + V(|\bar{\mathbf{x}}|) - \bar{E}.$$

Дополнительный член описывает кориолисову ( $\sim \omega$ ) и центробежную ( $\sim \omega^2$ ) силы  $\ddot{\bar{x}} = -V_{,x} - 2\omega\dot{\bar{y}} + \omega^2\bar{x}$ .

3. Пример (3.2.15,1в) может быть обобщен следующим образом. Пусть каноническое преобразование в  $T^*(M_e)$  задано уравнением

$$\sum_i p_i dq^i - E dt = \sum_i \bar{p}_i d\bar{q}^i - \bar{E} d\bar{t} + d \left( f(q, \bar{p}, t) + \bar{E}(\bar{t} - t) - \sum_i \bar{p}_i \bar{q}^i \right).$$

Из этого уравнения следует

$$\bar{t} = t, \quad E = \bar{E} - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}, \quad \bar{q}^i = \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_i}.$$

Если  $f$  удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial t} + H \left( q, \frac{\partial f}{\partial q}, t \right) = 0, \quad (3.2.16)$$

то  $\mathcal{H} = -\bar{E}$ . Следовательно,  $\bar{t} = s$ , и  $\bar{q}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{E}$  – постоянные. Таким образом, уравнение (3.2.16) определяет производящие функции преобразования, которое в  $T^*(M_e)$  приводит систему к равновесию.

## Задачи (3.2.17)

1. Определите  $L$  во вращающейся системе (3.2.15,2), следуя (2.3.23).
2. Проверьте, являются ли преобразования в (3.2.15,1) каноническими в расширенном фазовом пространстве.
3. Запишите уравнения Гамильтона для  $H = e^{-\mu t} \frac{p^2}{2} + e^{\mu t} \omega^2 \frac{x^2}{2}$  (см. (3.2.14,3)).
4. Преобразование  $t \rightarrow t - a$ ,  $x \rightarrow x e^{\mu a/2}$ ,  $p \rightarrow p e^{-\mu a/2}$  оставляет инвариантной функцию  $\mathcal{H} = H - E$ , где  $H$  — функция Гамильтона из задачи (3.2.17,3). Докажите, что производящая функция этого преобразования постоянна.
5. Докажите, что входящая в (3.1.5) функция  $f$  в соответствующих переменных также удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби (3.2.11).
6. Варьируя  $q$  ( $q \rightarrow q + \delta q$ ) в уравнении Лагранжа (2.3.20), выведите уравнения  $p = \partial W / \partial q$ ,  $\bar{p} = -\partial W / \partial \bar{q}$ .
7. Проверьте вычисления (3.2.10,1), проделав их в явном виде для  $W$  гармонического осциллятора с  $H = (p^2 + q^2)/2$ . То же — для  $f$  (функция  $f$  определена в (3.1.5)).
8. Записав  $\omega$  для карты расслоения, докажите, что  $dF = i_{X_p} \omega$ .

## Решения (3.2.18)

1.  $L$  можно записать в виде  $(\dot{\bar{x}} - [\omega \cdot \bar{x}])^2/2 - V(|\bar{x}|)$ , где вектор  $\omega$  направлен по оси  $z$ . К тому же выражению мы бы пришли и в результате прямой подстановки в  $L(\dot{x}, x)$ .
2. Вычислите скобки Пуассона.
3.  $-e^{\mu t} \omega^2 x = \dot{p} = \frac{d}{ds}(x e^{\mu t}) = e^{\mu t}(\ddot{x} + \dot{x}\mu)$ .
4. Производящей функцией служит  $E + \frac{\mu}{2} xp$  и, следовательно,

$$\dot{E} = \dot{H} = -\mu \left( e^{-\mu t} \frac{p^2}{2} - e^{\mu t} \frac{\omega^2 x^2}{2} \right) = -\frac{d}{ds} \frac{\mu}{2} xp.$$

5. Полагая  $f(\bar{p}, q, t) = W(\bar{q}(\bar{p}, q, t), q, t) + \sum_i \bar{q}^i(\bar{p}, q, t) \bar{p}_i$ , находим

$$\frac{\partial f}{\partial q^i} = p_i, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_i} = \bar{q}^i, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -H(q, p(\bar{p}, q, t)),$$

откуда получаем  $\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{p}, q, t) + H \left( q, \frac{\partial}{\partial q} f(\bar{p}, q, t) \right) = 0$ .

6.  $W = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q, \dot{q})$  для  $q^i(t) \rightarrow q^i(t) + \delta q^i(t)$ ,  $\dot{q}^i(t) \rightarrow \dot{q}^i(t) + \frac{d}{dt} \delta q^i(t)$ :

$$\delta W = \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \delta q^i \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right).$$

Вдоль траектории имеем  $(\dots) = 0$  и  $q^i(t_0) = \bar{q}^i$ ,  $\dot{q}^i(t) = q^i$ , следовательно,  $dW = p_i dq^i - \bar{p}_i d\bar{q}^i$ .

$$7. q(t) = \bar{q} \cos t + \bar{p} \sin t, p(t) = -\bar{q} \sin t + \bar{p} \cos t,$$

$$\bar{f}(\bar{q}, \bar{p}, t) = -\bar{q}\bar{p} \sin^2 t + \frac{\sin t \cos t}{2}(\bar{p}^2 - \bar{q}^2),$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{1}{2}(p(t)^2 - q(t)^2) = L,$$

$$W(\bar{q}, q, t) = -\bar{q}q \sin t + \frac{\sin t \cos t}{2}q^2 + \frac{\cos t}{2 \sin t}(q - \bar{q} \cos t)^2,$$

$$\frac{\partial W}{\partial q} = -\bar{q} \sin t + \frac{q - \bar{q} \cos t}{\sin t} \cos t = p,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{q}} = -q \sin t + \sin t \cos t \bar{q} - \frac{\cos^2 t}{\sin t}(q - \bar{q} \cos t) = -\bar{p},$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left( \bar{q}^2 + \left( \frac{\bar{q} \cos t - q}{\sin t} \right)^2 \right) = -H,$$

$$f(q, \bar{p}, t) = q\bar{p} \cos t - \frac{\bar{p}^2}{2} \sin t \cos t - \frac{\sin t}{2 \cos t}(q - \bar{p} \sin t)^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \bar{p} \cos t - \frac{q - \bar{p} \sin t}{\cos t} \sin t = p,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{p}} = q \cos t - \bar{p} \sin t \cos t + \frac{\sin^2 t}{\cos t}(q - \bar{p} \sin t) = \bar{q},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left( \left( \frac{q - \bar{p} \sin t}{\cos t} \right)^2 + \bar{p}^2 \right) = -H.$$

$$8. i_{X_F} \omega = (i_{F,p} \partial q - i_{F,q} \partial p) dq \wedge dp = F_{,p} dp + F_{,q} dq = dF.$$

### 3.3. Постоянные движения

**Постоянные (константы) движения** делят фазовое пространство на инвариантные по времени подмногообразия. Для гамильтоновой системы всегда существует по крайней мере одна постоянная движения, а  $(2m - 1)$  постоянных движения определяют траектории. Иногда для решения задачи достаточно  $m$  постоянных движения.

Как было показано в (2.3.12), все потоки в неравновесных точках локально диффеоморфны линейному потоку (2.3.5.1). Однако открытым остается вопрос, с одной стороны, о поведении траекторий в окрестностях положений равновесия, а с другой — о глобальных свойствах траекторий. В этом параграфе займемся изучением глобальных свойств, а к первому вопросу вернемся в § 3.4. Прежде всего известно, что образ траектории может заполнять не все пространство  $T^*(M)$ , а должен находиться на энергетической поверхности  $H = \text{const}$ , которая при условии, что  $dH \neq 0$ , представляет собой  $(2m - 1)$ -мерное подмногообразие. Более общее утверждение состоит в том, что если известны  $r$  независимых постоянных  $K_1 = H, K_2, \dots, K_r$ , то движение происходит только на  $2m - r$ -мерном замкнутом в  $T^*(M)$  подмногообразии  $N : K_i = \text{const}, i = 1, \dots, r$ . Независимость постоянных означает, что  $dK_i -$

независимые векторы в  $T_{(q,p)}^*(T^*(M)) \quad \forall (q,p) \in N$  (см. (2.1.10,3)). Например, если  $f(K) = 0$ , то постоянные зависимости, так как  $0 = df = \sum_i dK_i \partial f / \partial K_i$ .

Постоянные движения  $K_i$  позволяют редуцировать задачу, поскольку движение определяется ограничением  $X_H$  на  $N$ . Правда, как было показано в (2.4.40), говорить об ограничении векторного поля можно не всегда, хотя в рассматриваемом нами сейчас случае это допустимо, так как значения векторного поля  $X_H$  лежат в  $T(N)$ . Интуитивно ясно, что линии тока векторного поля  $X_H$  должны лежать в  $N$ , поскольку многообразие  $N$  инвариантно по времени. Формально векторы из  $T_q(N)$  можно охарактеризовать тем, что они "ортогональны"  $dK_i$  в следующем смысле:  $K_i$  обращаются на векторах из  $T_q(N)$  в нуль, поскольку  $K_i$  постоянны на  $N$  и все производные от  $K_i$  по направлению  $T(N)$  равны нулю. Далее, при  $i = 1, \dots, r$  имеем

$$(dK_i | X_H) = L_{X_H} K_i = \{K_i, H\} = \frac{d}{dt} K_i = 0,$$

так что  $X_H(q) \in T_q(N)$ . Если  $r = 2m - 1$ , то  $N$  — траектория. При  $m = 1$  достаточно записать  $H = p^2 + V(q)$ , чтобы найти траектории без всякого интегрирования.

### Примеры (3.3.1)

1.  $M = \mathbb{R}$ ,  $T^*(M) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $V = q^2$  (рис.3.1 и 3.2).
2.  $M = \mathbb{R}$ ,  $T^*(M) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $V = -q^2 + q^4$  (рис.3.3 и 3.4).
3.  $M = \mathbb{R}^+$ ,  $T^*(M) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ,  $V = 1/q$  (рис.3.5 и 3.6).
4.  $M = \mathbb{R}^+$ ,  $T^*(M) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ,  $V = -1/q + q^{-2}$  (рис.3.7 и 3.8).

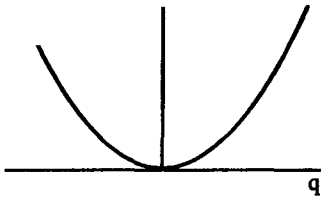


Рис. 3.1. Осцилляторный потенциал

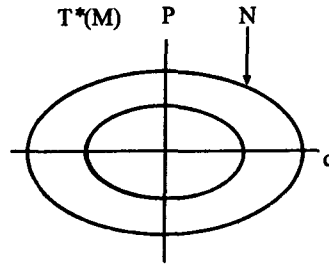


Рис. 3.2. Траектории осциллятора

### Примечания (3.3.2)

1. Положения равновесия (точки, в которых  $dH = 0$ ) — это 0-мерные траектории. В примерах (3.3.1-4) число таких точек, соответственно, равно 1, 3, 0, 1.
2. Все 1-мерные траектории примера (3.3.1,1) диффеоморфны  $T^1$ , в примере (3.3.1,2) существуют две 1-мерные траектории, диффеоморфные  $\mathbb{R}$  (а именно траектории с  $H = 0$ ), а остальные диффеоморфны  $T^1$ . В примере (3.3.1,4) имеется бесконечно много траекторий обоих типов.
3. Ограничение векторного поля  $X_H$  — не просто  $b$ -ограничение  $dH$ , так как в этом случае оно было бы просто нулем. Если  $T^*(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ , то (поскольку  $(dH | X_H) = 0$ )  $dH$  и  $X_H$  такие, как на рис. 3.9.

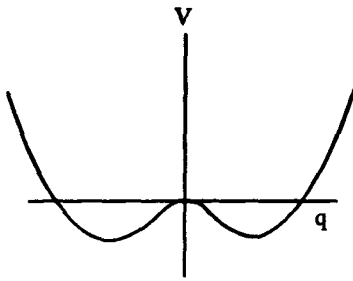


Рис. 3.3. Потенциал с двумя ямами

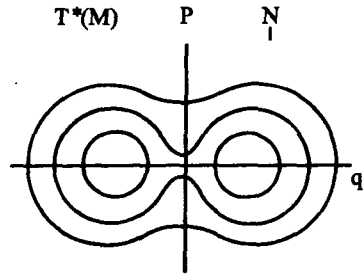


Рис. 3.4. Траектории в потенциале с двумя ямами

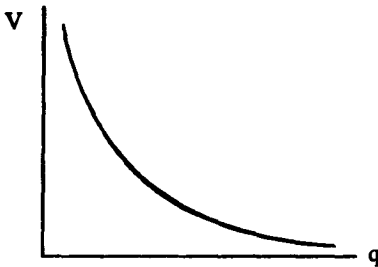


Рис. 3.5. Потенциал 1/q

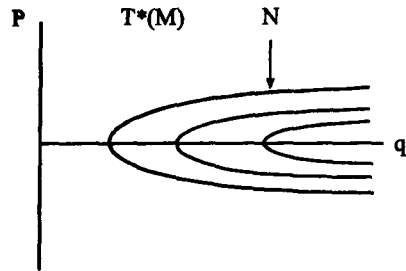


Рис. 3.6. Траектории в потенциале 1/q

4. Каноническая форма  $\omega$  не индуцирует на поверхностях  $K_i = \text{const}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , симплектическую структуру, поскольку  $\omega$  вырождена в направлениях  $X_{K_i}$ :

$$\omega(X_{K_i}, Y)|_N = (dK_i|Y)|_N = (dK_i|_N|Y) = 0 \quad \forall Y \in T_0^1(N).$$

Отсюда следует, что  $X_{K_i}|_N$  — не канонические векторные поля. Однако на  $N$  может быть задан инвариантный по времени объем — форма  $\Omega_N$ , определяемая на  $N$  формой  $\Omega = dK_1 \wedge \dots \wedge dK_r \wedge \hat{\Omega}_N$ .

Напомним, что такая постановка вопроса отличается от той, к которой мы пришли (2.5.6,5). Там мы спрашивали, образуют ли локально дифференциальные формы  $\nu_i \in \mathcal{N}^-$  поверхности, инвариантные относительно потоков векторного поля  $X \in \mathcal{N}$ . Сейчас на этот вопрос даем (тривиальный) утвердительный ответ, так как  $\nu_i = dK_i$  — точные формы. Независимо от этого ответ на локальный вопрос дает теорема (2.3.12), локально существуют даже

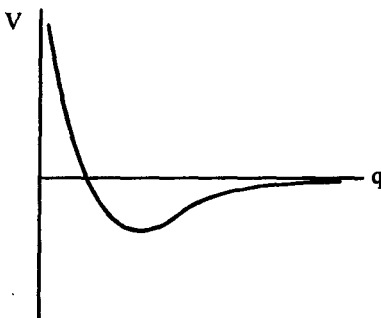


Рис. 3.7. Потенциал  $-1/q + q^{-2}$

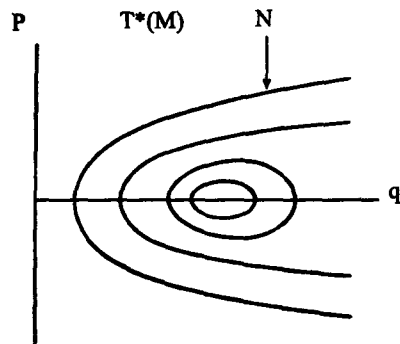
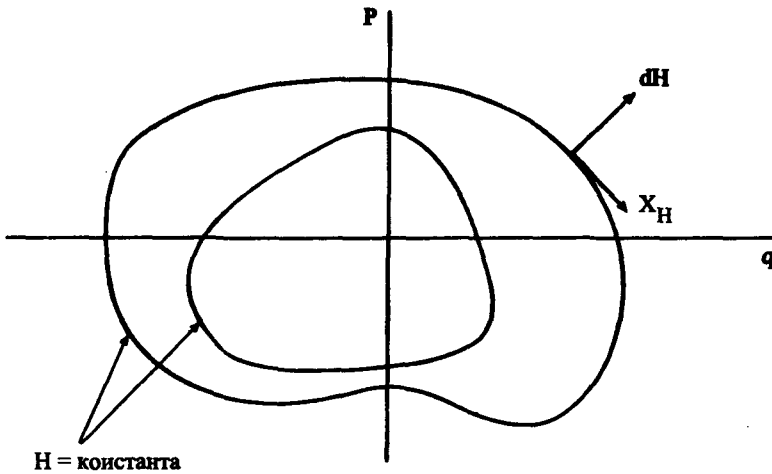


Рис. 3.8. Траектории в потенциале  $-1/q + q^{-2}$

Рис. 3.9. Векторы  $dH$  и  $X_H$ 

одномерные многообразия, такие, что  $X(q) \in T_q(N) \quad \forall q \in N$ . Но решающее значение имеет не локальный, а глобальный вопрос, и ответ на него может быть утвердительным, если  $K_i$  определены глобально и независимы.

Локально всегда существуют  $(2m - 1)$  не зависящих от  $t$  постоянных движения (2.3.12). В большинстве случаев эти локальные постоянные невозможно непрерывно продолжить на все  $T^*(M)$ , и они не определяют замкнутое  $(2m - 1)$ -мерное подмногообразие. Гамильтоновы системы с большим числом глобальных постоянных являются исключением [18]. Как показывает следующий весьма характерный случай, может случиться так, что траектория всюду плотна в более чем одномерном многообразии.

### Лемма (3.3.3)

Пусть  $\Phi_t$  — поток, порожденный функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2)$$

на  $(T^*(\mathbb{R}) - \{0\}) \times (T^*(\mathbb{R}) - \{0\})$ . Тогда функции

$$K_i := \frac{\omega_i^2}{2} q_i^2 + \frac{p_i^2}{2}, \quad i = 1, 2,$$

— постоянные движения  $\Phi_t^* K_i = K_i$  и независимы на этом многообразии. Если частоты  $\omega_i$  рационально зависимы, то все траектории — подмногообразия, диффеоморфные  $T^1$ . Если частоты  $\omega_i$  рационально независимы, то каждая траектория всюду плотна на двумерном подмногообразии, определяемом постоянными  $K_i$ .

### Доказательство

С помощью преобразования

$$(q_i, p_i) = \left( \sqrt{\frac{K_i}{\omega_i}} \sin \varphi_i, \sqrt{K_i \omega_i} \cos \varphi_i \right), \quad i = 1, 2,$$

отобразим  $(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times (\mathbb{R}^2 - \{0\})$  на  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times T^1 \times T^1$  (см. (3.1.8,1)). На этой карте эволюция во времени определяется отображением (см. (3.2.6,1))

$$\Phi_t : (K_1, K_2, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (K_1, K_2, \varphi_1 + \omega_1 t, \varphi_2 + \omega_2 t).$$



Пусть  $\Psi_n := \Phi_{2\pi n/\omega_1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Рассмотрим ограничение  $\Phi_n$  на последний множитель  $T^1$ , на остальных множителях  $\Psi_n = 1$ .

1. Предположим, что  $\omega_1/\omega_2 = g_1/g_2$ ,  $g_i \in \mathbb{Z}$  и взаимно простые. Тогда  $\Psi_{g_1} = 1$ , и каждому значению  $\varphi_1$  соответствуют  $g_2$  значений  $\varphi_2$ . Траектория на  $T^1 \times T^1$  выглядит следующим образом (см. (2.3.14) и рис. 3.9а).

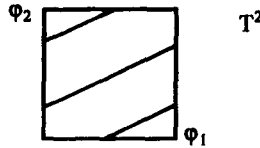


Рис. 3.9а. Периодические траектории

Такие траектории, которые возвращаются в исходную точку (в  $T^*(M)$ ), называются периодическими, или замкнутыми. Они представляют собой замкнутые многообразия, диффеоморфные  $T^1$ .

2. Пусть отношение  $\omega_1/\omega_2$  иррационально, тогда  $\Psi_{g_1} \neq 1 \forall g_1 \neq 0$ . Так как  $T^1$  — компактное множество, то отображение  $\Psi_g(\varphi_2)$  должно иметь точку накопления:

$$\forall \epsilon > 0 \exists g_1, g_2 \in \mathbb{Z} : |\Psi_{g_1}(\varphi_2) - \Psi_{g_2}(\varphi_2)| < \epsilon,$$

следовательно,

$$\Psi_{g_1 - g_2}(\varphi_2) = \varphi_2 + \eta, \quad |\eta| < \epsilon.$$

Таким образом,  $\Psi_{g(g_1 - g_2)}$ ,  $g \in \mathbb{Z}$ , заполняет  $T^1$  точками, отстоящими друг от друга на расстояние, меньше, чем  $\epsilon$ . Это означает, что  $\forall \varphi_1$  достижимые траекторией точки  $\varphi_2$  лежат в двумерном подмногообразии всюду плотно. Так как траектория проходит через все точки  $\varphi_1$ , то она всюду плотна в  $T^2$ . Такие траектории называются квазипериодическими (рис. 3.10).

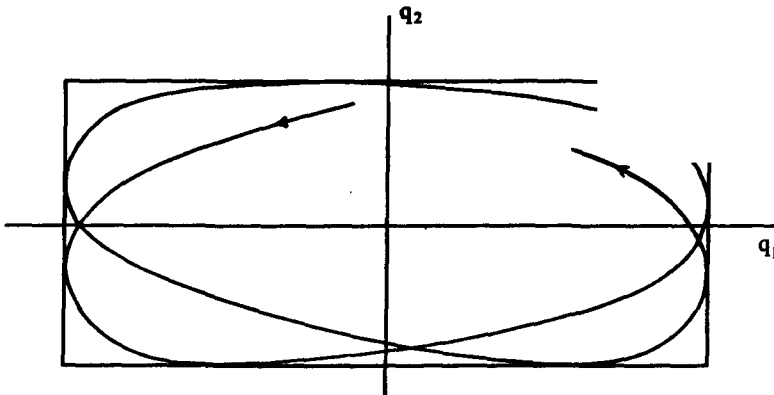


Рис. 3.10. Квазипериодические траектории

**Примечания (3.3.4)**

1. Лемма (3.3.3) допускает обобщение на  $n$ -мерный гармонический осциллятор. Доказательство проводится итерациями.

2. Спроектированная на конфигурационное пространство  $(q_1, q_2)$  траектория при иррациональном отношении  $\omega_1/\omega_2$  всюду плотно заполняет прямоугольник (фигуры Лиссажу).
3. Существуют, так называемые, **кривые Пеано**, сплошь заполняющие многообразия размерности выше единицы. Дифференцируемые кривые могут самое большее располагаться в многообразии всюду плотно.
4. Если постоянные движения не являются независимыми в смысле, указанном в начале параграфа, то они все же могут ограничивать траектории, однако невозможно сделать какие-либо общие утверждения, ни о размерности множества  $N = \{(q, p) \in T^*(M) : K_i(q, p) = \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ , ни даже о том, является ли  $N$  многообразием. Например, в (3.3.1,1) для  $H = 0$  имеем, что  $dH = 0$  и  $N$  — точка; таким образом, одна постоянная уменьшает размерность на 2. В (3.3.1,2) энергетическая поверхность  $H = E < 0$  распадается на два куска. Если выбрать  $f(q) \in C^\infty(T^*(M))$ , такую, чтобы она совпадала на кусках с различными постоянными, и умножить ее на  $g(H) \in C^\infty(T^*(M))$ , такую, что  $g = 0$  при  $H > E$ , то можно получить постоянную, которая зависит не только от  $H$ , но и вынуждает траекторию находиться на одном куске энергетической поверхности. В нашем смысле она не зависит от  $H$ , так как ее дифференциал  $\sim dH$  (разумеется, только при  $H = E < 0$ ). В этом случае две постоянные понижают размерность только на 1. Наконец, в (3.3.1,2) множество  $H = 0$  не является многообразием: в окрестности нулей оно обладает структурой (2.1.7,6).
5. Как упоминалось в примере (2.3.14), при  $\omega_1/\omega_2 = g_1/g_2$  существует константа движения  $\sin(\varphi_1 g_2 - \varphi_2 g_1)$ . Можно предположить, что когда траектория вынуждена оставаться на подмногообразиях, то существуют какие-то дополнительные постоянные движения. Как показывает следующий (правда, негамильтонов) пример, в общем случае это не так. Действительно, пусть  $M = \mathbb{R}$ ,  $X \in \mathcal{T}_0^1(M) : x \rightarrow (x, x)$ , эволюция во времени:  $\dot{x} = x \Rightarrow x(t) = x(0)e^t$ . Тогда существуют три траектории  $\mathbb{R}^-$ ,  $\{0\}$ ,  $\mathbb{R}^+$ , каждая траектория образует подмногообразие в  $M$ , и ни одна не плотна. Но не зависящей от времени постоянной движения  $\in C^\infty(M)$  не существует. Такая постоянная должна была бы быть константой на траекториях и на всем  $\mathbb{R}$ , но тогда ее дифференциал был бы тождественно равен нулю на всем  $\mathbb{R}$ .
6. Пусть  $T^*(M)$  — открытое подмножество на  $\mathbb{R}^{2m}$ , которое, согласно (2.1.7,1), глобально задано  $2m$  независимыми функциями координат  $z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2m$ . Если существует функция  $J \in C^\infty(T^*(M))$ , достаточно быстро возрастающая вдоль траекторий (т.е. если  $\forall z \in T^*(M) \exists c > 0: \frac{d}{dt}(J \circ \Phi_t(z)) > c \forall t$ ), то эти траектории — одномерные подмногообразия. Как показывает задача (3.3.17,6), в этом случае можно построить  $(2m - 1)$  независимых постоянных движения, принадлежащих классу  $C^\infty(T^*(M))$ . На расширенном фазовом пространстве  $T^*(M_e)$  с независимой переменной  $s$  временная координата  $t$  в силу уравнения  $dt/ds = 1$  (см. (3.2.13)) играет роль функции  $J$ . Следовательно, если расширенное фазовое пространство  $T^*(M_e)$  открыто в  $\mathbb{R}^{2m+2}$ , то каждая система имеет  $(2m + 1)$  независимых постоянных движения в  $T^*(M_e)$ . В частности, эргодическую систему, в которой каждая траектория всюду плотно заполняет  $(2m - 1)$ -мерную энергетическую поверхность, можно рассматривать как подсистему системы с дополнительной степенью свободы, которая обладает максимальным числом постоянных. Таким образом, существование постоянных движения отнюдь не обязательно означает, что движение просто. Проекция (одномерной) траектории на подмногообразие может быть исключительно сложной.

В (2.6.13) мы упоминали о существовании временного среднего

$$f_\infty := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \tau_t f.$$

Следовательно, вычисляя

$$\tau_t f_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{T+t} dt' \tau_{t'} f = f_\infty \quad \forall f \in C^\infty(T^*(M)),$$

получаем постоянную по времени функцию. Если  $f_\infty$  к тому же постоянна на  $T^*(M) \quad \forall f$ , то это означает, что точки из любой сколь угодно малой окрестности со временем распространяются по всему многообразию. Поэтому если траектория не заполняет всюду плотно энергетическую поверхность  $N$ , то можно надеяться, что нам всегда удастся найти на  $N$  не постоянную инвариантную по времени функцию  $f_\infty$ . Это означало бы существование дополнительных независимых постоянных. К сожалению, подобным надеждам не суждено сбыться, так как даже в том случае, когда  $f \in C^\infty(T^*(M))$ , функция  $f_\infty$  отнюдь не обязательно оказывается непрерывной.

**Пример (3.3.5)**

$$M = T^2, \quad T^*(M) = T^2 \times \mathbb{R}^2, \quad H = p_1^2/2 + p_2^2/2.$$

Эволюция во времени определяется отображением  $(\varphi_1, \varphi_2; p_1, p_2) \rightarrow (\varphi_1 + p_1 t, \varphi_2 + p_2 t; p_1, p_2)$ ; если, при  $f = g(\varphi_1) \cdot g(\varphi_2)$ ,

$$g(\varphi) = \begin{cases} \exp \left[ -\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi - 2\pi} \right] & \text{для } \varphi \neq 0, \\ 0 & \text{для } \varphi = 0, \end{cases}$$

то

$$f_\infty(\varphi_1, \varphi_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\varphi_1 + p_1 t, \varphi_2 + p_2 t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 g(\varphi_1) g(\varphi_2)$$

при условии, что отношение  $p_1/p_2$  иррационально; но, с другой стороны,

$$f_\infty = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi g(\varphi)^2 \quad \text{для } p_1 = p_2, \varphi_1 = \varphi_2.$$

Следовательно,  $f_\infty$  всюду разрывна. Постоянные такого рода всегда могут быть найдены, необходимо лишь приписать траекториям произвольные числа. Однако такие постоянные не интересны, поскольку они не определяют подмногообразий.

Глобальные производящие функции групп канонических преобразований, оставляющих инвариантной функцию Гамильтона, являются постоянными движения. Каждому параметру группы соответствует производящая функция, но, вообще говоря, эти производящие функции нельзя считать независимыми от  $H$ . Например, в (3.2.6,2)  $p_1, p_2$  и  $p_3$  — постоянные, и  $H = |p|^2$ . Хотя производящие функции линейно независимы, они могут быть алгебраически зависимы.

**Пример (3.3.6)**

**$m$ -мерный осциллятор:**  $M = \mathbb{R}^m, m > 1,$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (p_i^2 + x_i^2).$$

Функции  $M_{ik} = p_i p_k + x_k x_i$  и  $L_{ik} = p_i x_k - p_k x_i$ ,  $i, k = 1, \dots, m$ , как нетрудно проверить, — постоянные.  $\{M_{ik}, H\} = \{L_{ik}, H\} = 0$ . Скобки Пуассона  $\{ \}$  функций  $M$  и  $L$  можно представить в виде линейной комбинации функций  $M$  и  $L$ ; они задают полные векторные поля, которые порождают группу канонических преобразований, изоморфную  $U_m$ . В рассматриваемом случае мы имеем  $(m(m+1))/2$  функций  $M$  и  $(m(m-1))/2$  функций  $L$ , т.е. всего  $m^2$ . Разумеется, они могут оказаться алгебраически зависимыми, фазовое пространство всего лишь  $2m$ -мерно. Например, при  $m = 2$  имеем  $2H = M_{11} + M_{22}$ ,  $M_{12}^2 + L_{12}^2 = M_{11} \cdot M_{22}$ .

### Примечания (3.3.7)

1. Упомянутая в примере группа — далеко не самая большая группа, оставляющая инвариантной функцию Гамильтона. Наиболее широкую группу порождают функции:  $\{K \in C^\infty(T^*(M)) : \{K, H\} = 0, X_K \text{ — полное векторное поле}\}$ . Она зависит не от конечного числа параметров и поэтому не локально компактна. Даже в тривиальном примере  $M = \mathbb{R}$ ,  $H = p^2$  функции  $f(p)$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , порождают различные группы  $(x, p) \rightarrow (x + \lambda f'(p), p)$ , если только функции  $f$  не отличаются на константу. Самая большая группа имеет бесконечно много производящих функций, не все из которых независимы.
2. Разумно было бы задать и противоположный вопрос о группе, которая при наименьшем числе параметров допускает наибольшее число постоянных. Хотя число  $K_i$  равно самое большое  $(2m - 1)$ , может случиться так, что их скобки Пуассона нельзя выразить в виде линейных комбинаций от  $K_i$ . В этом случае только группа с более чем  $(2m - 1)$  параметрами содержит все постоянные. Но и такая минимальная группа не определена однозначно. В приведенном выше примере все минимальные группы однопараметрические, и  $f(p) = \sqrt{p^2 + c^2}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , все порожденные группы при всех  $c \neq 0$  одинаково хороши.

Найти  $(2m - 1)$  постоянных удастся далеко не всегда. Иногда достаточно определить  $m$  постоянных. Эта ситуация возникает так часто, что даже получила свое название.

### Определение (3.3.8)

**Гамильтонова система называется интегрируемой на  $U$ , если в инвариантной окрестности  $U \subset T^*(M)$  существуют  $m$  функций  $K_i$ , обладающих следующими свойствами:**

- (i)  $\{K_i, H\} = 0$ ;
- (ii)  $\{K_i, K_j\} = 0$ ;
- (iii)  $dK_i$  на  $U$  линейно независимы.

### Примечания (3.3.9)

1.  $H$  и  $K_i$  взаимно независимы.
2. Интегрируемые системы широко распространены, и большинство книг по механике (в том числе и наш курс) по существу представляют каталоги интегрируемых систем. Может создаться ложное впечатление, будто большинство систем интегрируемы на  $U$ , которая всюду плотна в  $T^*(M)$ . В действительности, интегрируемые системы являются лишь редкими исключениями, и их популярность основана на их разрешимости.

Прежде всего заметим, что  $K_i$  можно записать в новых координатах:

### Теорема (3.3.10) (Лиувилль)

Для интегрируемой системы справедливы следующие утверждения:  $\forall (q, p) \in U$

(i)  $\exists U_1: (q, p) \in U_1 \subset U$ ,  $\varphi_i \in C^\infty(U_1)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , такая, что  $U_1: \{K_i, K_j\} = \{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$ ,  $\{K_i, \varphi_j\} = \delta_j^i$ ;

(ii) все другие переменные  $\bar{\varphi}_i$ , удовлетворяющие соотношениям (i), представимы в виде

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{X}(K)}{\partial K_i}, \quad \mathcal{X} \in C^\infty(\mathbb{R}^m).$$

### Доказательство

Как следует из (2.5.11), существуют координаты  $(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_m; K_1, \dots, K_m)$ , такие, что  $X_{K_i}$  порождают потоки  $\bar{\varphi}_j \rightarrow \bar{\varphi}_j + \tau_j$ ,  $K_i \rightarrow K_i$ :

$$\{K_j, \bar{\varphi}_i\} = L_{X_{K_j}} \bar{\varphi}_i = \delta_{ij}.$$

В этих координатах внешняя форма  $\omega$  представима в виде  $d\bar{\varphi}_j \wedge dK_j + F_{ij} dK_i \wedge dK_j$ , так как члены  $\sim d\bar{\varphi}_i \wedge d\bar{\varphi}_j$  отсутствуют из-за того, что

$$0 = \{K_i, K_j\} = i_{X_{K_i}} i_{X_{K_j}} \omega = i_{\partial/\partial \bar{\varphi}_i} i_{\partial/\partial \bar{\varphi}_j} \omega.$$

Поскольку  $X_{K_j}$  порождают канонические потоки и поэтому  $\omega$  инвариантна относительно  $\bar{\varphi}_j \rightarrow \bar{\varphi}_j + \tau_j$ , то функции  $F_{ij}$  могут зависеть только от  $K$ . Поскольку  $\omega$  и  $d\bar{\varphi}_j \wedge dK_j$  — точные формы, поэтому также должно выполняться соотношение  $F := F_{ij} dK_i \wedge dK_j$ , следовательно,  $F = df$ ,  $f = f_j(K) dK_j$ . Тогда

$$\omega = d(\bar{\varphi}_j + f_j(K)) \wedge dK_j = d\varphi_j \wedge dK_j, \quad \text{где } \varphi_j = \bar{\varphi}_j + f_j(K).$$

Это означает, что если начало координат  $\bar{\varphi}$  на поверхностях  $K_j = \text{const}$  выбрано надлежащим образом, то координаты удовлетворяют (i). Условию (ii) они также удовлетворяют, так как функция  $f$  определена с точностью до формы  $d\chi$  (которая точна).  $\square$

### Следствие (3.3.11)

Как следует из (3.3.10(ii)), каноническое преобразование, соответствующее эволюции системы во времени, должно быть вида

$$(K_i, \varphi_j) \rightarrow \left( K_i, \varphi_j + \frac{\partial}{\partial K_j} \mathcal{X}(t, K) \right).$$

Из группового свойства (2.3.7) заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial K_j} \mathcal{X}(t_1 + t_2, K) = \frac{\partial}{\partial K_j} \mathcal{X}(t_1, K) + \frac{\partial}{\partial K_j} \mathcal{X}(t_2, K).$$

Так как функция  $\mathcal{X}$  должна непрерывно зависеть от  $t$  и вклад в  $\mathcal{X}$ , не зависящий от  $K_j$ , не является существенным, то эволюцию во времени можно описать соотношением

$$(K_i(t), \varphi_j(t)) = \left( K_i(0), \varphi_j(0) + t \frac{\partial}{\partial K_j} H(K) \right).$$

Следовательно, на  $N_\alpha$  снова возникает линейный поток (2.3.5,1). Не зависящие от времени постоянные  $\varphi_i \partial H / \partial K_j - \varphi_j \partial H / \partial K_i$ , вообще говоря, не могут быть продолжены на все  $N_\alpha$  и не ограничивают движение многообразием размерности меньше  $m$ . Все изложенные до сих пор соображения имели только локальный характер и не могут пролить свет на глобальные вопросы. Таким образом, мы не продвинулись особенно далеко по сравнению с (2.3.12). Но совершенно безобидные дополнительные предположения позволяют выяснить глобальную структуру.

**Теорема (3.3.12) (Арнольд)**

Пусть в интегрируемой системе множество  $N_\alpha = \{(q, p) \in U : K_i(q, p) = \alpha_i \in K_i(U) \subset \mathbb{R}\}$  компактно и связно. Тогда  $N_\alpha$  диффеоморфно тору  $T^m$ .

**Доказательство**

Как было показано, на  $N_\alpha$  все  $X_{K_i} \in \mathcal{T}_0^1(N_\alpha)$ . По предположению,  $L_{X_{K_i}} L_{X_{K_j}} = L_{X_{K_j}} L_{X_{K_i}}$ ,  $X_{K_i}$  — полные векторные поля, так как множество  $N_\alpha$  компактно (см. (2.3.6,2)). Тем самым преобразования

$$\exp\left[\sum_j \tau_j L_{X_{K_j}}\right], \quad (\tau_j) \in \mathbb{R}^m,$$

порождают  $m$ -параметрическую группу диффеоморфизмов  $\Phi_\tau$  множества  $N_\alpha$  и отображение

$$\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow N, \quad (\tau) \rightarrow \Phi_\tau(z), \quad (z \in N \text{ — фиксированная точка})$$

локально является даже диффеоморфизмом (см. (2.5.11)). Например, в окрестности  $\{0\} \in \mathbb{R}^m$  диффеоморфизм  $\Phi$  задан отображением  $\tau_j \rightarrow z_j + \tau_j (dz_j|X_{K_j})$  ( $z_j$  следует понимать как координаты на карте), поэтому матрица производных образована из компонент векторного поля  $X_{K_j}$  и несингулярна (см. [1], 16.5,6). Групповое свойство позволяет распространить это утверждение на все  $(\tau) \in \mathbb{R}^m$  так, что образ диффеоморфизма  $\Phi$  в  $N_\alpha$  одновременно открыт и замкнут, и поэтому совпадает со всем  $N_\alpha$ . Но отображение  $\Phi$  не инъективно. Стабилизатор  $G = \{\tau : \Phi_\tau(z) = z\}$  в силу того, что  $\Phi_{\tau+\tau'} = \Phi_\tau \circ \Phi_{\tau'}$ , должен быть дискретной подгруппой аддитивной группы  $\mathbb{R}^m$ , а отображение фактор-группы  $\mathbb{R}^m/G \rightarrow N_\alpha$  биективно и даже диффеоморфно ([1], 16.10,8). Дискретные подгруппы в  $\mathbb{R}^m$  — это решетки, фактор-группа  $\mathbb{R}^m/G$  диффеоморфна  $T^r \times \mathbb{R}^{m-r}$  при  $0 \leq r \leq m$ . Так как  $N_\alpha$ , по предположению, компактно, то должно выполняться равенство  $r = m$ .  $\square$

**Примечания (3.3.13)**

1. Так как траектория всегда остается в связной компоненте множества  $N_\alpha$ , то рассмотрение только связных  $N_\alpha$  (см. (3.3.1,2) при  $H < 0$ ) не является существенным ограничением.
2. Если множество  $N_\alpha$  не компактно, то полноту векторного поля  $X_{K_i}$  необходимо вводить особым требованием. Приведенные выше соображения показывают, что в этом случае  $N_\alpha$  диффеоморфно  $T^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ ,  $0 \leq r \leq m$ .
3. Изложенные выше соображения остаются в силе и для нефиксированных  $K_i : K_i$  могут изменяться в достаточно малой окрестности  $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ .  $(K_i, \varphi_j)$  — локальные канонические координаты на  $U_1 \times T^m$ , которое является инвариантным подмногообразием в окрестности  $U$  из (3.3.8). Если  $N_\alpha$  компактны, связны и покрывают всю окрестность  $U$ , то последняя становится расслоением с базой  $U$  и слоями  $T^m$ . Однако это расслоение не обязательно тривиально. При определенных условиях невозможно глобально определить  $(K_i, \frac{\cos \varphi_j}{\sin \varphi_j})$  на  $U$ .

Если множество  $N_\alpha$  компактно, то его можно параметризовать в соответствии со стандартными картами на  $T^1$ , и для координат можно ввести нормальную форму (3.3.10).

**Определение (3.3.14)**

Пусть множество  $N_\alpha$  диффеоморфно  $T^m$  и  $C_j$  — путь на  $N_\alpha$ , охватывающий  $j$ -й тор и стягиваемый в точку относительно других торов, т.е. гомотопный

$$(0 \times 0 \times \dots \times \underbrace{T}_{j\text{-е место}} \times \dots \times 0).$$

Тогда

$$I_j(\alpha) := \frac{1}{2\pi} \int_{C_j} \Theta$$

называется **переменной действие**. Если  $\det(\partial I_j / \partial \alpha_k) \neq 0$ , то локально  $\alpha$  можно выразить через  $I$  и рассматривать генератор  $S := \int_{q_0}^q \Theta$  как функцию от  $I$  и старых координат  $q$ . При этом  $q^i$  и  $p_i = \partial S / \partial q^i$  переходят в  $I_j$  и  $\varphi_j := \partial S / \partial I_j$ .

Величины  $\varphi_j$  называются **переменными углом**, или **угловыми переменными**, соответствующими переменным действие  $I_j$ .

### Примечания (3.3.15)

1. Так как путь интегрирования лежит в  $N_\alpha$ , то переменные  $I_j$  зависят от  $\alpha_i$ . Однако следует подчеркнуть, что  $I_j$  принимает одно и то же значение для всех  $C_j$  соответствующих спецификаций. Отсюда, в частности, вытекает постоянство  $I_j$  относительно эволюции во времени. Разность значений  $I_j$  для различных  $C_j$  равна  $\frac{1}{2\pi} \int_F d\Theta$ , где натянутая на контуры  $C_j$  и  $C'_j$  поверхность  $F$  лежит в  $N_\alpha$  (рис.3.11). Но  $d\Theta = 0$  на  $N_\alpha$ , поэтому

$$I_j - I'_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial F} \Theta = \frac{1}{2\pi} \int_F d\Theta = 0.$$

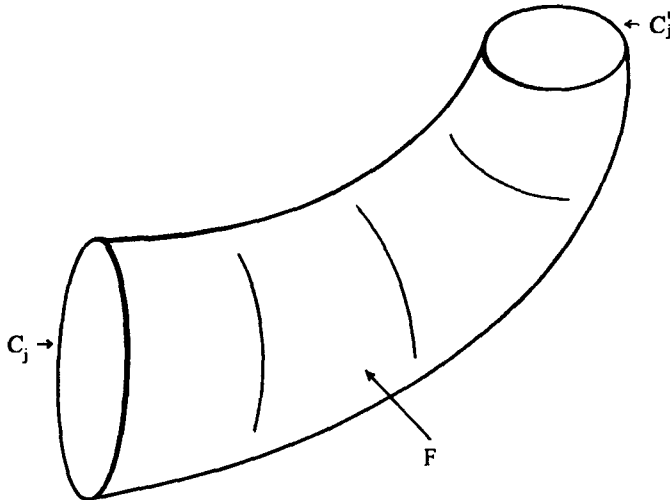


Рис. 3.11. Путь интегрирования при определении  $I_j$

2. Как показывают те же рассуждения,  $S$  не зависит от пути интегрирования, если тот лежит в  $N_\alpha$ , и при фиксированном  $q_0$  зависит только от  $q$  и  $I$ . Тем не менее функция  $S$  не определена глобально, так как при обходе по замкнутому контуру  $C_j$  изменяется на  $2\pi I_j$ .
3. Поэтому угловые переменные  $\varphi_i = \partial S / \partial I_i$  также не определены глобально, а при обходе по замкнутому контуру изменяются на  $2\pi \partial I_j / \partial I_i = 2\pi \delta_j^i$ . Таким образом,  $\varphi_i$  —

стандартные углы на  $T^m$ . Произвол в выборе величины  $q_0$  сводится к замене переменных  $\varphi_i \rightarrow \varphi_j + \partial f(I)/\partial I_j$ , т.е. к замене калибровки, которая всегда возможна по теореме Лиувилля (3.3.10(ii)).

4. Так как  $(I, \varphi)$  — канонические координаты, то, согласно (3.3.11), их эволюция во времени происходит по закону

$$(I_j(0), \varphi_j(0)) \rightarrow \left( I_j(0), \varphi_j(0) + t \frac{\partial H(I)}{\partial I_j} \right).$$

Частоты  $\partial H(I)/\partial I_j$  непрерывно зависят от  $I$ ; отношения частот, вообще говоря, не рациональны, поэтому траектория всюду плотно заполняет  $N_\alpha$ .

5. Переменные действие — угол  $(I, \varphi)$  глобальны, если область этой карты представляет собой  $2m$ -мерное инвариантное по времени подмногообразие. Тем не менее область карты не может быть распространена на все  $T^*(M)$ : во-первых, окрестность  $U$  из (3.3.8) не обязательно должна совпадать со всем  $T^*(M)$  и, во-вторых,  $U$  не обязательно должна быть тривиальным расслоением  $T^m$ .

### Примеры (3.3.16)

1. **Осциллятор:**  $M = \mathbb{R}$ ,  $H = (p^2 + \omega^2 q^2)/2$ . Одномерные системы всегда интегрируемы, если исключены точки с  $dH = 0$ . В случае осциллятора необходимо выколоть точку  $p = q = 0$ . Следовательно, выбираем  $U = \{(q, p) : H > 0\}$ ,  $N = \{(q, p) : p^2 + \omega^2 q^2 = 2E = \text{const}\}$ ,

$$S = \int_0^q dq' \sqrt{2E - \omega^2 q'^2} = \frac{E}{\omega} \arcsin q\omega/\sqrt{2E} + \frac{q}{2} \sqrt{2E - q^2\omega^2},$$

$$I = \frac{E}{\omega}, \quad S(q, I) = I \arcsin q \sqrt{\omega/2I} + \frac{q}{2} \sqrt{2\omega I - q^2\omega^2},$$

$$\varphi = \frac{\partial S}{\partial I} = \arcsin q \sqrt{\omega/2I}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2\omega I - q^2\omega^2},$$

$\varphi$  и  $I$  — канонические переменные из (3.1.8,1).

2. **Маятник:**  $M = T^1$ ,  $H = p^2 - \lambda \cos \varphi$ . Если  $H \neq \{-\lambda, \lambda\}$ , то  $dH \neq 0$ . Действительно, при  $H = -\lambda$  траектория — не тор, а точка (положение равновесия); при  $H = \lambda$  траекторий три: точка (неустойчивое равновесие в вершине) и две траектории, диффеоморфные  $\mathbb{R}$  (асимптотическое стремление к вершине). Имеем

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi \sqrt{E + \lambda \cos \varphi}, \quad \frac{\partial I}{\partial E} = \frac{1}{\omega(E)} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\varphi}{2\sqrt{E + \lambda \cos \varphi}}.$$

При  $E \gg \lambda$  потенциальная энергия вносит незначительные возмущения, и траектории мало отличаются от  $p = \text{const}$ . При  $-\lambda < E < \lambda$  траектория имеет точки поворота при  $\cos \varphi_m = -E/\lambda$  (рис. 3.12),  $\oint d\varphi$  при этом изменяется от  $-\varphi_m$  до  $\varphi_m$ ,  $\omega(E)$  — эллиптический интеграл.

3. **Малые колебания:**  $M = \mathbb{R}^m$ ,  $H = \sum_{i=1}^m \frac{p_i^2}{2m_i} + V(x)$ . Предположим, что потенциал  $V$  имеет точку равновесия, в которую помещаем начало координат:  $dV(0) = 0$ . Затем заменяем  $V$  тремя первыми членами его разложения в ряд Тейлора:

$$V(x) \rightarrow V(0) + \frac{1}{2} x_i x_k V_{,ik}(0)$$



(не зная заранее, насколько хороша такая замена (см. § 3.5). Как бы то ни было, кинетическая и потенциальная энергии становятся квадратичными формами, а система — интегрируемой. Матрицы квадратичных форм не коммутируют, поэтому их нельзя одновременно диагонализировать с помощью ортогональной матрицы. Но функцию Гамильтона  $H$  с помощью точечного преобразования

$$p_i \rightarrow p_i \sqrt{m_i}, \quad x_i \rightarrow x_i / \sqrt{m_i}$$

можно привести к виду

$$H = \sum_{i=1}^m \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} x_i x_k v_{ik}, \quad v_{ik} = V_{,ik}(0) / \sqrt{m_i m_k},$$

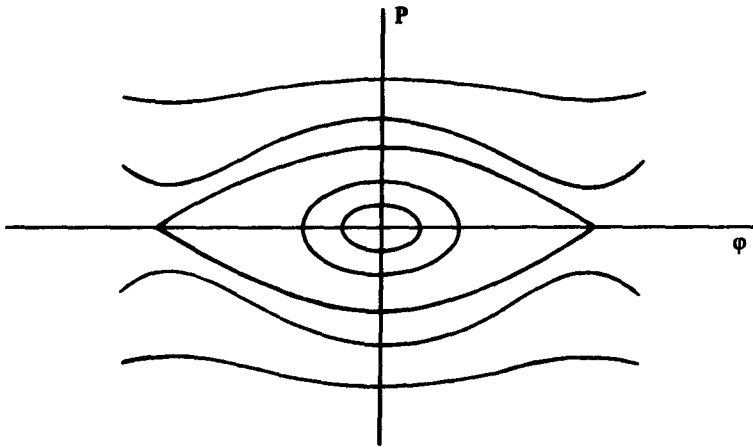


Рис. 3.12. Траектории маятника

а затем диагонализировать  $v$  ортогональным преобразованием:  $(M^t v M)_{ik} = \delta_{ik} \nu_k$ ,  $M^t M = 1$ . В канонических координатах  $(\bar{x}, \bar{p})$ :  $x_i = M_{ik} \bar{x}_k$ ,  $p_i = M_{ik} \bar{p}_k$

$$H = \frac{1}{2} \sum_i (\bar{p}_i^2 + \nu_i \bar{x}_i^2)$$

и  $\bar{p}_i^2 + \nu_i \bar{x}_i^2$  являются  $m$  постоянными, которые и требовалось найти. Множества  $N_\alpha$  диффеоморфны  $T^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ , причем  $r$  — число положительных  $\nu_i > 0$ . Для устойчивого равновесия ( $r = m$ ,  $V_{,ik}$  — положительно определенная матрица) существуют переменные угол — действие, которые могут быть найдены, как в примере (3.3.16,1).

#### 4. Цепочка Тоды:

Если в задачах с несколькими частицами заменить гармонические потенциалы другими функциями, то интегрируемость, вообще говоря, будет утрачена. Однако иногда происходит чудо, и удастся найти дополнительные постоянные. Следующая модель линейной цепочки с тремя одинаковыми частицами

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + e^{q_1 - q_2} + e^{q_2 - q_3} + e^{q_3 - q_1}$$

имеет в качестве постоянных наряду с  $H$  импульс центра масс  $P = p_1 + p_2 + p_3$ , который порождает преобразование  $q^i \rightarrow q^i + \lambda$ ,  $p_i \rightarrow p_i$ , очевидным образом оставляющее  $H$  инвариантной. Кроме того, сохраняется

$$K = -\frac{1}{9}(p_1 + p_2 - 2p_3)(p_2 + p_3 - 2p_1)(p_3 + p_1 - 2p_2) + \\ + (p_1 + p_2 - 2p_3)e^{q_1 - q_2} + (p_2 + p_3 - 2p_1)e^{q_2 - q_3} + (p_3 + p_1 - 2p_2)e^{q_3 - q_1},$$

в чем нетрудно убедиться с помощью уравнений движения. При этом, величина  $K$  инвариантна относительно сдвига, порождаемого  $P$ :  $\{P, K\} = \{H, K\} = 0$ , и так как  $dH$ ,  $dP$  и  $dK$  независимы на открытом множестве в  $T^*(\mathbb{R}^3)$ , то система интегрируема.

**Задачи (3.3.17)**

$M = \mathbb{R}^3$ ,  $H = |\mathbf{p}|^2$ .  $K_i = p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $K_{3+i} = [q \wedge p]_i =: L_i$ . Независимы ли постоянные  $K_1, K_2, \dots, K_6$ ?

Докажите с помощью карты, что  $\omega|_{N_\alpha} = 0$  (см. доказательство теоремы 3.3.10).

Докажите, что гармонический осциллятор с периодической внешней силой  $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \lambda q \cos \omega t - E$ ,  $\omega \neq 1$ , — интегрируемая система в расширенном фазовом пространстве  $\mathbb{R}^4$ .

Докажите постоянство  $K$  исходя из (3.3.16,4).

Вычислите частоты колебаний молекулы  $\text{H}_2\text{O}$ , одномерной и линеаризованной:

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_3^2) + \frac{1}{2M}p_2^2 + \frac{K}{2}((q_2 - q_1)^2 + (q_3 - q_2)^2).$$

Как выглядят соответствующие нормальные формы колебаний?

Пусть  $J \in C^\infty(T^*(M))$  — такая функция, что  $\forall z \in T^*(M) \exists c > 0$  с  $\frac{d}{dt}(J \circ \Phi_t(z)) > 0$ . В предположении, что на  $T^*(M)$  существуют  $2m$  независимых функций  $\bar{z}_k$  (например, функций координат, если  $T^*(M)$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^{2m}$ ). Постройте  $2m - 1$  независимых постоянных движений. (Поставьте в соответствие каждой траектории ее начальную точку.)

**Задача (3.3.18)**

Нет, ибо в противном случае каждая траектория была бы точкой. Из  $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{p}) = 0$  следует  $\mathbf{L} \cdot d\mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot d\mathbf{L} = 0$ .

Пусть  $A_q, A_p$  — матрицы размерности  $(m \times m)$  частных производных от  $K_i$  по  $q^j$  и, соответственно,  $p_j$ . Выберем координаты так, чтобы  $\det A_p \neq 0$ . Тогда локально можно было бы записать  $p_j(q, K)$ . Пусть  $P_q$  — частная производная от  $p_i$  по  $q^j$  (при фиксированном  $K$ ); это означает, что  $A_p P_q + A_q = 0$ . Из обращения в нуль скобок Пуассона следует  $A_p A_q^T = A_q A_p^T$ . Таким образом,  $A_p P_q A_p^T + A_q A_p^T = A_p (P_q A_p^T + A_q^T) = 0$ . Поскольку  $A_p^{-1}$  существует, то заключаем, что  $A_p P_q^T + A_q = 0$ , следовательно,  $P_q^T = P_q$ . Именно это и есть условие, что форма  $\sum p_i(q, \alpha) dq^i$  замкнута на  $N_\alpha$ .

Наряду с  $\mathcal{H}$  существует еще постоянная

$$K = ((\omega^2 - 1)q - \lambda \cos \omega t)^2 + ((\omega^2 - 1)p + \lambda \omega \sin \omega t)^2; \\ \frac{dK}{ds} = 2[(\omega^2 - 1)p + \lambda \omega \sin \omega t][(\omega^2 - 1)q - \lambda \cos \omega t - \\ - (\omega^2 - 1)(q + \lambda \cos \omega t) + \lambda \omega^2 \cos \omega t] = 0.$$

Множество  $N$  некомпактно и диффеоморфно  $T^1 \times \mathbb{R}$ .

4. Выберем периодические  $q_{i+2} = q_{i-1}$  и т.д.:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \frac{-1}{9} \prod_{i=1}^3 (p_{i+1} + p_{i-1} - 2p_i) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (p_{i+1} + p_{i-1} - 2p_i)(p_{i-1} + p_i - 2p_{i+1})(e^{q_{i+1}-q_{i-1}} - e^{q_{i-1}-q_i}) = \\ &= \sum_{i=1}^3 (p_{i+1} + p_{i-1} - 2p_i)(p_{i-1} - p_{i+1})e^{q_{i+1}-q_{i-1}} = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 (p_{i+1} + p_{i-1} - 2p_i)e^{q_{i+1}-q_{i-1}}. \end{aligned}$$

5.

$$v_{ik} = K \begin{pmatrix} 1/m & -1/\sqrt{mM} & 0 \\ -1/\sqrt{mM} & 2/M & -1/\sqrt{mM} \\ 0 & -1/\sqrt{mM} & 1/m \end{pmatrix},$$

$$\det(v - 1 \cdot \omega^2) = \omega^2 \left( \frac{K}{m} - \omega^2 \right) \left( \omega^2 - \frac{K}{m} - \frac{2K}{M} \right).$$

| Частота                    | $\omega = 0$              | $\omega = \sqrt{K/m}$     | $\omega = \sqrt{K/m + 2K/M}$ |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|------------------------------|
| Нормальная форма колебаний | $H O H$<br>• • •<br>→ → → | $H O H$<br>• • •<br>← • → | $H O H$<br>• • •<br>→ ← →    |

6. По предположению, отображение  $\mathbb{R} \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, z) \rightarrow J \circ \Phi_t(z)$  при каждом фиксированном  $z \in T^*M$  строго монотонно по  $t$  и поэтому обратимо. Прообраз относительно этого отображения, например, 0 ставит в соответствие каждому  $z$  единственное значение  $t$  и тем самым определяет отображение  $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \rightarrow \tau(z)$  с  $J \circ \Phi_{\tau(z)}(z) = 0$ . Так как  $0 = J \circ \Phi_{\tau(z)}(z) = J \circ \Phi_{\tau(z)-t} \circ \Phi_t(z)$ , то имеем соотношение  $\tau(\Phi_t(z)) = \tau(z) - t$ . Следовательно, отображение  $T^*M \rightarrow T^*M$ ,  $z \rightarrow \Phi_{\tau(z)}(z)$  инвариантно по времени:  $\Phi_{\tau(\Phi_t(z))}(\Phi_t(z)) = \Phi_{\tau(z)-t} \circ \Phi_t(z) = \Phi_{\tau(z)}(z)$ . Комбинируя это свойство с координатными функциями  $\bar{z}_k$ ,  $k = 1, \dots, 2m$ , получаем  $2m$  постоянных  $\bar{z}_k \circ \Phi_{\tau(z)}(z)$ . Если ввести, по определению,

$$\tilde{z}_k(t, z) := \bar{z}_k \circ \Phi_t(z), \quad \tilde{z}_{k,i} := \frac{\partial \tilde{z}_k}{\partial z_i} \quad \text{и} \quad \dot{\tilde{z}}_k := \frac{\partial \tilde{z}_k}{\partial t},$$

то дифференциалы постоянных движения представимы в виде

$$d(\tilde{z}_k \circ \Phi_{\tau(z)}(z)) \equiv d\tilde{z}_k(\tau(z), z) = \left( \tilde{z}_{k,i} + \dot{\tilde{z}}_k \frac{\partial \tau}{\partial z_i} \right) dz_i.$$

Так как  $\Phi_t$  — диффеоморфизм, то ранг матрицы  $(\partial \tilde{z}_k / \partial z_i)$  равен  $2m$ , ранг матрицы  $(\dot{\tilde{z}}_k \partial \tau / \partial z_i)$  равен 1, и поэтому сумма этих матриц имеет ранг не менее  $(2m - 1)$ . Но условие

$$J \circ \Phi_{\tau(z)}(z) = 0$$

означает, что ранг действительно равен  $(2m - 1)$ , и таково, следовательно, число независимых постоянных.

### 3.4. Предел $t \rightarrow \pm\infty$

*Иногда эволюция во времени рассматриваемой системы асимптотически стремится к эволюции во времени некоторой интегрируемой системы. В таких случаях проясняется поведение системы при больших временах.*

В общем случае точность теоретических предсказаний убывает с возрастанием времени, и судьба системы при  $t \rightarrow \pm\infty$  теряется во тьме. Но если потенциал имеет конечную ширину, то убегающие частицы в конце концов движутся свободно, и их асимптотическая эволюция во времени легко поддается описанию. Как будет показано, на той части фазового пространства, которую заполняют траектории убегающих частиц, эволюция во времени  $\Phi_t$  диффеоморфна свободной эволюции  $\Phi_t^0$ , и существует  $(2m - 1)$  постоянных движения.

#### Определение (3.4.1)

??

Пусть

$$\mathcal{A} = \{f \in C^\infty(T^*(M)) : \exists \text{ поточечный предел } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tau_t f \in C^\infty(T^*(M))\} = \\ = \{\text{асимптотические постоянные}\},$$

$$\{H\}' = \{f \in C^\infty(T^*(M)) : \tau_t f = f\} = \{\text{постоянные}\}, \quad \tau_\pm : \mathcal{A} \rightarrow \{H\}', \quad f \rightarrow \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tau_t f.$$

#### Примечания (3.4.2)

1. Так как отображение  $\tau_t$  перестановочно с алгебраическими операциями, то  $\mathcal{A}$  и  $\{H\}'$  образуют алгебры и  $\tau_\pm$  — гомоморфизмы.
2. Временные пределы постоянны во времени, и так как  $\tau_\pm|_{\{H\}'} = 1$ , то  $\tau_\pm$  — отображения  $\mathcal{A}$  на  $\{H\}'$ .
3. Отображения  $\tau_\pm$  не обязательно должны быть инъективными;  $\{H\}'$  может быть собственным подмножеством множества  $\mathcal{A}$ .
4. Множество  $\mathcal{A}$  (и его квантовомеханическое обобщение) представляет интерес в атомной физике, так как непосредственному измерению поддается только асимптотическая часть траекторий атомных частиц. Например, угол отклонения частиц определяется разностью между  $\tau_- p$  и  $\tau_+ p$ .

#### Примеры (3.4.3)

1.  $M = T^1$ ,  $H = \omega p$  (осциллятор). Так как эволюция во времени определяется отображением  $(\varphi, p) \rightarrow (\varphi + \omega t, p)$ , то функция  $f(\varphi, p) \in C^\infty(T^*(T^1))$  есть асимптотическая постоянная движения лишь в том случае, если  $f$  зависит только от  $p$ ; этот случай тривиален, поскольку  $\mathcal{A} = \{H\}'$ ,  $\tau_\pm = 1$ .
2.  $M = \mathbb{R}^+$ ,  $H = p^2/2 + \gamma/r^2$ ,  $\gamma > 0$ . Система интегрируема, и так как  $p = \dot{r} = \sqrt{2(E - \gamma/r^2)}$ , то

$$t = \int \frac{dr r}{\sqrt{2Er^2 - 2\gamma}} = \frac{1}{2E} \sqrt{2Er^2 - 2\gamma}, \\ \Rightarrow r = \sqrt{\frac{\gamma}{E} + 2Et^2}, \quad p = t\sqrt{2E} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{2E^2} + t^2} \right)^{-1}.$$

Таким образом,  $r(t)$  — гиперболы, траектории  $H = \text{const}$  асимптотически горизонтальны в фазовом пространстве (рис. 3.13). Если  $E$  выразить через начальные значения, то придем к разложению по времени:

$$\Phi_t : \begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \left[ p^2 + \frac{2\gamma}{r^2} \right]^{-1/2} \left[ 2\gamma + \left( t \left( p^2 + \frac{2\gamma}{r^2} \right) + rp \right)^2 \right]^{1/2} \\ \left[ p^2 + \frac{2\gamma}{r^2} \right]^{1/2} \left[ 2\gamma + \left( t \left( p^2 + \frac{2\gamma}{r^2} \right) + rp \right)^2 \right]^{-1/2} \left( t \left( p^2 + \frac{2\gamma}{r^2} \right) + rp \right) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$p \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \pm \sqrt{p^2 + \frac{2\gamma}{r^2}}, \quad \frac{1}{r} \rightarrow 0,$$

поэтому

$$\mathcal{A} = \left\{ f\left(p, \frac{1}{r}\right), f \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty)), \right. \\ \left. \text{так что } \lim_{\frac{1}{r} \rightarrow 0} \text{ существует} \right\},$$

$$\tau_\pm : f\left(p, \frac{1}{r}\right) \rightarrow f\left(\pm \sqrt{p^2 + \frac{2\gamma}{r^2}}, 0\right).$$

В этом случае  $\{H\}'$  всего лишь  $\{f(H)\}$  и является собственным подмножеством в  $\mathcal{A}$ .

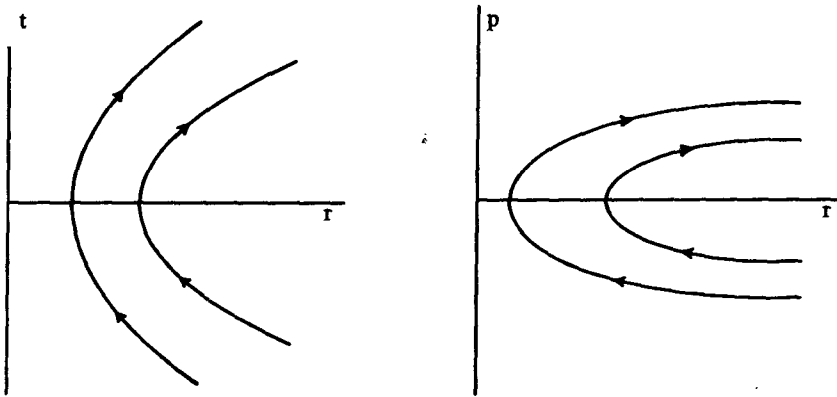


Рис. 3.13. Траектории в потенциале  $1/r^2$

$\therefore M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $H = |p|^2/2 + \alpha/r^2$ . Точечное преобразование  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  порождает каноническое преобразование  $(x, y; p_x, p_y) \rightarrow (r, \varphi; p_r, L)$ , под действием которого  $H$  перейдет в  $p_r^2/2 + \gamma/r^2$ ,  $\gamma = \alpha + L^2/2$ . Таким образом, радиальное движение — такое же, как в примере (3.4.3.2). Подставляя  $r(t)$  и интегрируя уравнение  $\dot{\varphi} = \partial H / \partial L = L/r^2$  при  $\alpha + L^2/2 > 0$ , получаем

$$\Phi_t : (\varphi, L) \rightarrow \left( \varphi + \frac{L}{\sqrt{2\alpha + L^2}} \left[ \arctg \frac{rp_r + t(p_r^2 + \frac{L^2 + 2\alpha}{r^2})}{\sqrt{2\alpha + L^2}} - \arctg \frac{rp_r}{\sqrt{2\alpha + L^2}} \right], L \right).$$

Функция  $f(\varphi, L)$  теперь также принадлежит  $\mathcal{A}$ , так как момент импульса сохраняется, а частица удаляется под определенным углом (рис. 3.14)

$$\tau_\pm f(\varphi, L) = f\left(\varphi + \frac{L}{\sqrt{2\alpha + L^2}} \left[ \pm \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{rp_r}{\sqrt{2\alpha + L^2}} \right], L \right).$$

Заметим, что в данном случае существует третья, не зависящая от  $H$  и  $L$ , постоянная

$$\tau_+ p_x = \sqrt{2H} \cos \left( \varphi + \frac{L}{\sqrt{2\alpha + L^2}} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{r p_r}{\sqrt{2\alpha + L^2}} \right] \right).$$

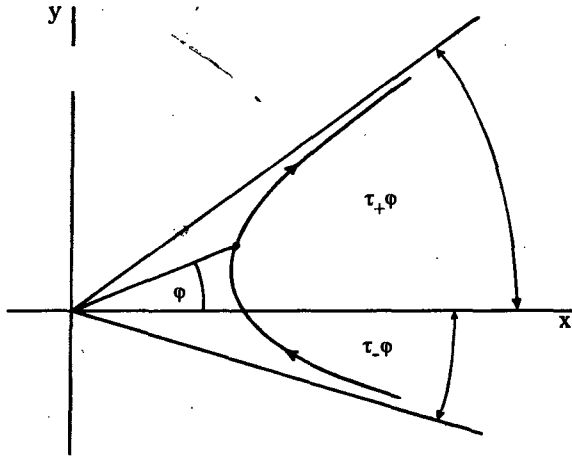


Рис. 3.14. Траектории на плоскости

Для физики существенна зависимость между наблюдаемыми при  $t \rightarrow \pm\infty$ , и было бы желательно знать отображение  $\tau_+ \circ \tau_-^{-1}$ . К сожалению, отображение  $\tau_-^{-1}$  не определено однозначно, так как  $\tau_+$  — не инъективное отображение. Эту трудность можно обойти, выбрав из  $\mathcal{A}$  подалгебру так, чтобы на ней отображение  $\tau_{\pm}$  было инъективно. В этом случае отображение асимптотических величин зависит от того, какая подалгебра выбрана; например, если выбрана  $\{H\}'$ , то на асимптотические величины действует отображение  $\tau_+ \circ \tau_-^{-1} = 1$ . Если эволюция во времени  $\Phi_t$  асимптотически приближается к эволюции во времени  $\Phi_t^0$  простой порной системы, то по аналогии с (2.3.11,3) можно построить предельный диффеоморфизм, который воспроизводит действие отображений  $\tau$  на подалгебре и делает их обратимыми.

#### Определение (3.4.4)

Пусть  $H$  и  $H_0$  — две функции Гамильтона, порождающие на  $T^*(M)$  потоки  $\Phi_t$  и  $\Phi_t^0$ . Если

- (i)  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi_{-t} \circ \Phi_t^0 =: \Omega_{\pm}$  существуют поточечно в окрестностях  $D_{\pm}$ ;
- (ii)  $\Omega_{\pm}$  — локальные канонические преобразования из  $D_{\pm}$  на окрестности  $\mathcal{R}_{\pm}$ ;
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi_{-t}^0 \circ \Phi_t$  существуют на  $\mathcal{R}_{\pm}$  и равны  $\Omega_{\pm}^{-1}$ .

то говорим, что существуют преобразования Мёллера  $\Omega_{\pm}$ .

#### Примечания (3.4.5)

1. Из (2.3.11,3) следует предположение

$$\Phi_t \circ \Omega_{\pm} = \Omega_{\pm} \circ \Phi_t^0 \Rightarrow L_{\Omega_{\pm} \cdot X_{H_0}} = L_{X_H} \Rightarrow H_0 \circ \Omega_{\pm}^{-1} = H|_{\mathcal{R}_{\pm}},$$

разумеется, лишь с точностью до постоянной. Кроме того, мы видим, что  $\Phi_{-t} \circ \Phi_t^0$  сходится к  $\Phi_{t_0}^0|_{D_{\pm}} \forall t_0$ , поэтому  $D_{\pm}$  можно считать инвариантными относительно  $\Phi_t^0$ , в силу

чего  $\mathcal{R}_\pm$  инвариантны относительно  $\Phi_t$ . Таким образом, поток, порожденный функцией Гамильтона  $H$  на  $\mathcal{R}_\pm$ , диффеоморфен потоку, порожденному функцией Гамильтона  $H_0$  на  $D_\pm$ .

- Для наблюдаемых  $f$  равенство  $f \circ \Omega^{-1} \circ \Phi_t \circ \Omega = f \circ \Phi_t^0$  означает, что образ эволюции во времени, порожденной  $H_0$ , совпадает с эволюцией во времени образа, порожденной функцией Гамильтона:  $\tau_t(\Omega_* f) = \Omega_*(\tau_t^0 f)$ . Таким образом,  $\{H_0\}'$  оказывается отображенным на  $\{H\}'$ . Если  $H_0$  содержит  $2m - 1$  независимых постоянных (как, например, в случае свободной эволюции во времени), то  $H$  на  $\mathcal{R}_\pm$  также содержит  $2m - 1$  независимых постоянных. В частности, такая система интегрируема на  $\mathcal{R}_\pm$ . Следовательно, теорема (2.3.12) становится глобальной в том смысле, что  $\mathcal{R}_\pm$  инвариантны во времени, хотя окрестность  $U$ , о которой идет речь в доказательстве теоремы, не обязательно должна быть инвариантной во времени.
- Преобразования индуцируемы посредством  $\Omega_\pm$  на  $\{H_0\}'$ , в действительности, являются  $\tau_\pm$ , так как  $f \circ \Phi_{-t}^0 \circ \Phi_t = f \circ \Phi_t \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} f \circ \Omega_\pm^{-1}$  или  $\tau_\pm(f) = \Omega_{\pm*}(f) \quad \forall f \in \{H_0\}'$ . Следовательно,  $\mathcal{A}$  содержит  $\Omega_{\pm*}\{H_0\}'$  и обычно больше, чем  $\{H\}'$ .
- Если  $H$  и  $H_0$  инвариантны относительно  $T: (x, p) \rightarrow (x, -p)$  (обращения времени — неканонического преобразования), то  $\Phi_t \circ T = T \circ \Phi_{-t}$  и  $\Phi_t^0 \circ T = T \circ \Phi_{-t}^0$ ; таким образом, из существования  $\Omega_+$  на  $D_+$  следует существование  $\Omega_-$  на  $T(D_+)$ .
- Точки, первоначально близкие в фазовом пространстве, по истечении достаточно большого промежутка времени могут далеко разойтись. Диффеоморфность отображений  $\Omega_\pm$  означает, что разность расстояний между точками под действием  $\Phi_t$  и  $\Phi_t^0$  остается ограниченной при больших  $t$ .
- Если потенциал содержит константу связи  $V \rightarrow \lambda V$ , то  $\Omega_\pm(\lambda)$  непрерывно зависят от  $\lambda$ . Поэтому траектории в  $\mathcal{R}_\pm$  гомотопичны прямым и не могут образовывать никаких углов.

### Примеры (3.4.6)

- $M = T^1$ ,  $H = \omega p$  (осциллятор). В данном случае  $\Omega_\pm$  существуют только при  $H_0 = H$  и поэтому тривиальны.
- $M = \mathbb{R}^+$ ,  $H = p^2/2 + \gamma/r^2$ ,  $H_0 = p^2/2 + \gamma_0/r^2$  (нельзя положить  $\gamma_0 = 0$ , так как тогда векторное поле  $X_{H_0}$  не было бы постоянным при  $p \neq 0$ ):

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi_{-t} \Phi_t^0(r, p) = \left( r \sqrt{\frac{r^2 p^2 + 2\gamma}{r^2 p^2 + 2\gamma_0}}, p \sqrt{\frac{r^2 p^2 + 2\gamma_0}{r^2 p^2 + 2\gamma}} \right) =: (\bar{r}, \bar{p}).$$

Отображение  $(r, p) \rightarrow (\bar{r}, \bar{p})$  в действительности является каноническим преобразованием (задача (3.4.27,3)), и  $H_0(r, p) = H(\bar{r}(r, p), \bar{p}(r, p))$ , следовательно,  $H_0 = H \circ \Omega_\pm$ . Областями определения и областями значений для  $\Omega_\pm$  служат  $D_\pm = \mathcal{R}_\pm = T^*(\mathbb{R}^+)$ . Все функции Гамильтона  $H$  указанного выше вида  $\forall \gamma > 0$  порождают диффеоморфные потоки,  $\Phi_{-t}^0 \circ \Phi_t$  сходится к  $\Omega_\pm^{-1}$ .

- $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $H = |p|^2/2 + \alpha/|x|^2$ ,  $H_0 = |p|^2/2$ . Вводя в (3.4.3,3) полярные координаты, сводим радиальную задачу к примеру (3.4.6,2), а для угловой переменной получаем

$$\Omega_\pm(\varphi, L) = \left( \varphi + \operatorname{arctg} \frac{rp_r}{L} - \frac{L}{\sqrt{2\alpha + L^2}} \operatorname{arctg} \frac{rp_r}{\sqrt{2\alpha + L^2}} \mp \frac{\pi}{2} \left( \frac{L}{\sqrt{2\alpha + L^2}} - 1 \right), L \right).$$

Нетрудно убедиться, что  $\Omega_{\pm} H_0$  каноническим преобразованием переводится в  $H$ ;  $D_{\pm} = \mathcal{R}_{\pm} = T^*(M^2) \setminus \{M^2 \times \{0\}\}$ , но  $\Omega_{\pm}$  допускает продолжение на все  $T^*(M^2)$  и удовлетворяет условиям (3.4.4, i–iii),  $\mathbf{p} \in \{H_0\}'$ , а в действительности  $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$ .

Следующие свойства приведенных выше примеров встречаются и у более широких классов потенциалов.

### Теорема (3.4.7)

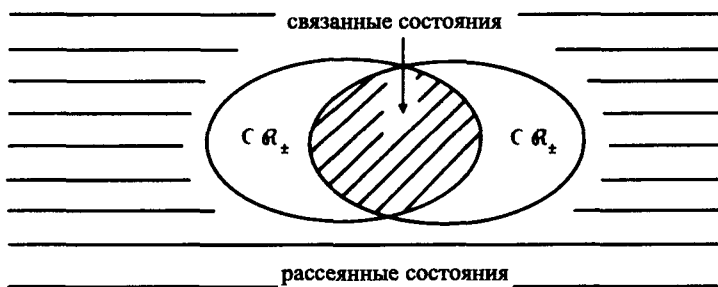
Пусть  $M = \mathbb{R}^m$ .  $H = |\mathbf{p}|^2/2 + V(\mathbf{x})$ ,  $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ ,  $H_0 = |\mathbf{p}|^2/2$ .

Тогда

- (i)  $\exists \Omega_{\pm}$ ,  $D_{\pm} = T^*(\mathbb{R}^m) \setminus \{\mathbb{R}^m \times \{0\}\}$ ;
- (ii)  $CR_{\pm} = \bigcup_n b_n^{\pm}, b_n^{\pm} = \{z := (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in T^*(\mathbb{R}^m) : \|\pi_1^0 \Phi_{\pm t} z\| < n \forall t > 0 \text{ или } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \pi_2^0 \Phi_{\pm t} z = 0\}$ .  
Здесь  $\pi_1$  (соответственно  $\pi_2$ ):  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{x}$  (соответственно  $\mathbf{p}$ ) — проекции тривиального расслоения,  $T^*(\mathbb{R}^m) = \|\ \|$  — норма в  $\mathbb{R}^m$ ;
- (iii)  $\Omega(\mathcal{R}_+ \Delta \mathcal{R}_-) = 0$ , где  $\Delta$  — симметричная разность множеств,  $\Omega$  — мера Лиувилля.

### Примечания (3.4.8)

1. Условие (3.4.7(ii)) утверждает, что  $\mathcal{R}_{\pm}$  — дополнения к траекториям, которые при всех  $t \geq 0$  остаются в компактных множествах или соответствуют нулевой асимптотической скорости. Однако  $\mathcal{R}_+$  не обязательно должно быть равно  $\mathcal{R}_-$ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий одномерный пример (рис. 3.15). Здесь  $CR_+ \cap CR_- = \{\text{замкнутое множество, ограниченное } bc \text{ и } cb\} \cup \{(-\infty, g) \times \{0\}\} \cup \{(h, \infty) \times \{0\}\}$ . Кроме того,  $CR_+$  (соответственно  $CR_-$ ) включает в себя дополнительные траектории  $ab$  и  $fc$  (соответственно  $bc$  и  $cd$ ).
2. На языке атомной физики  $\mathcal{R}_+ \cap \mathcal{R}_-$  называются рассеянными, а  $CR_+ \cap CR_-$  — связанными состояниями: условие (3.4.7(iii)) означает асимптотическую полноту: связанные



и рассеянные состояния заполняют все фазовое пространство. Из приведенного выше примера видно, что слово “почти” не может быть исключено из теоремы (2.6.11).

3. Теорему (3.4.7) о силах с компактным носителем можно распространить на силы, достаточно быстро спадающие на бесконечности. В многочастичных системах с потенциалами  $V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)$  силы вообще не спадают вдоль прямых  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_k + \text{const}$ . В этом случае необходимо обратиться к многоканальной теории, которую мы изложим в рамках квантовой механики<sup>12</sup>.

<sup>12</sup>III: Квантовая механика атомов и молекул.



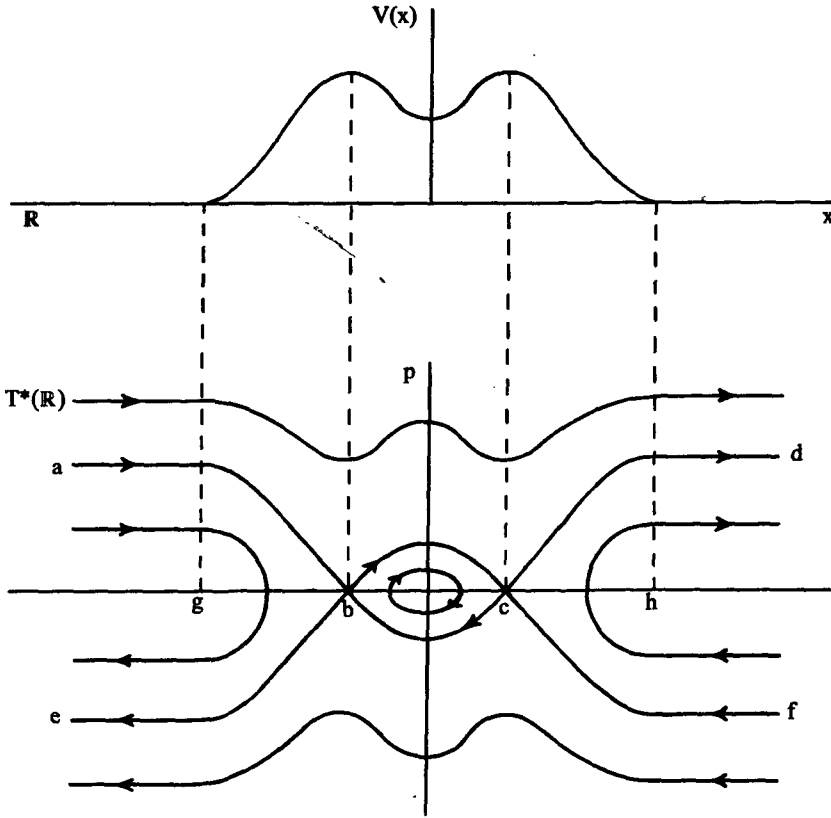


Рис. 3.15. Траектории в фазовом пространстве

4. Отсюда видим, что утверждение (2.3.15,3) справедливо только для компактного  $M$ , но не для всего  $\mathbb{R}^n$ . Если ввести в пространство функций топологию, в которой  $C_0^\infty(T^*(M))$  является открытым множеством, то в такой топологии потенциалы, не допускающие других постоянных движения, кроме  $H$ , не могут быть всюду плотными: существует окрестность  $V = 0$  с  $2m - 1$  постоянными движения для каждого принадлежащего этой окрестности потенциала.

**Доказательство** теоремы (3.4.7)

- (i)  $\Phi_t^0 : (x, p) \rightarrow (x + pt, p)$  и  $\Phi_t^0 = \Phi_t \forall \|x\| > \rho$ , если  $V(x) = 0 \forall \|x\| > \rho$ . Поэтому для всех  $(x, p) \in D_+ \exists T$ , такое, что  $\Phi_{-t} \circ \Phi_{T+t}^0(x, p) = \Phi_T^0(x, p) \forall t > 0$ . Тем самым получаем  $\Phi_{-T-t} \circ \Phi_{T+t}^0(x, p) = \Phi_{-T} \circ \Phi_T^0(x, p) \forall t > 0$  и, таким образом, для всех точек из  $D_+$  предел достигается за конечное время и  $\Omega_+ = \Phi_{-T} \circ \Phi_T^0$ . Чтобы понять, почему этот предел является диффеоморфизмом, заметим, что для любого компактного подмножества  $K$  из  $D_+$  существует  $T$  такое, что  $\Omega_+|_K = \Phi_{-T} \circ \Phi_T^0|_K$ , и  $\forall t$  отображения  $\Phi_{-t} \circ \Phi_t^0$  — диффеоморфизмы (следовательно, векторные поля  $X_H$  и  $X_{H_0}$  полны). Аналогичные утверждения справедливы и для  $\Omega_-$  и  $\Omega_{\pm}^{-1}$ .
- (ii) При  $\forall z \in \mathcal{R}_+, \exists z_0 \in D_+ : z = \Phi_{-t} \circ \Phi_t^0 z_0 \forall t > T \Leftrightarrow \Phi_t z = \Phi_t^0 z_0 = (x_0 + p_0 t, p_0)$  при всех  $t > T$ . Поэтому пространственная часть сколь угодно велика, в то время как импульс остается отличным от нуля, и, таким образом,  $\mathcal{R}_+$  лежит в дополнении к  $\bigcup_n b_n^+$ . Аналогич-

ное утверждение справедливо и относительно  $\mathcal{R}_-$ . Наоборот, если  $V = 0 \quad \forall \|\pi_1 z\| > n$  и  $\|\pi_1 \Phi_t z\| > n, \pi_2 \Phi_t z \neq 0 \quad \forall t > T$ , то существует  $z_0$ , такое, что  $\Phi_{T+\tau} z = \Phi_T^0 \circ \Phi_T z = \Phi_{T+\tau}^0 z_0 \quad \forall \tau > 0$ . Следовательно,  $z = \Omega_+ z_0, z \in \mathcal{R}_+$ .

(iii) Из (2.6.12) следует  $\Omega(b_n^+ \cap b_n^-) = \Omega(b_n^+) = \Omega(b_n^-) \forall n \in \mathbb{Z}^+$ : при  $\Omega(b_n^\pm \cap Cb_n^\mp) = 0$ . Так как  $C\mathcal{R}_\pm = \bigcup_n b_n^\pm$  и  $b_n^\pm$  монотонны по  $n$ , то заключаем, что

$$\Omega(C\mathcal{R}_+ \cap \mathcal{R}_-) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(b_n^+ \cap \mathcal{R}_-) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(b_n^+ \cap Cb_n^-) = 0,$$

и, таким образом,  $\Omega(\mathcal{R}_+ \Delta \mathcal{R}_-) = 0$ . □

Рассмотрим теперь асимптотику траекторий. Для этого желательно знать, как они связаны между собой. Сформулируем следующее определение.

#### Определение (3.4.9)

Пусть  $\Omega_\pm$  существуют и  $\mathcal{R}_+$  совпадает с  $\mathcal{R}_-$ . Тогда локальное каноническое преобразование  $S = \Omega_+^{-1} \circ \Omega_-$ , отображающее  $D_-$  на  $D_+$ , называется преобразованием рассеяния, или  $S$ -преобразованием.

#### Примечания (3.4.10)

1.  $S$ -преобразование представимо в виде  $\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_{-T}^0 \circ \Phi_{2T} \circ \Phi_{-T}^0$  и поэтому может быть интерпретировано как возвращение по свободной траектории в течение времени  $T$ , затем, следование по траектории, проходящей по области рассеяния (носителю потенциала) в течение времени  $2T$  и возвращение по другой свободной траектории в течение времени  $T$  (рис. 3.16). Если на далеких расстояниях истинные траектории асимптотически совпадают со свободными, то увеличение времени  $T$  не изменяет  $S$ -преобразования, так как при этом одни и те же участки траекторий оказываются пройденными то в одну, то в другую стороны.  $S$ -преобразование переводит свободную траекторию, совпадающую при  $t \rightarrow -\infty$  с истинной траекторией, в другую свободную траекторию, которая совпадает с истинной при  $t \rightarrow +\infty$ . Поэтому  $S$ -преобразование коммутирует со свободной эволюцией во времени:  $\Phi_t^0 \circ S = S \circ \Phi_t^0$ , что, впрочем, можно увидеть из определения:

$$\Phi_{-T_1+t}^0 \circ \Phi_{T_1+T_2} \circ \Phi_{-T_2-t}^0 = \Phi_{-\bar{T}_1}^0 \circ \Phi_{\bar{T}_1+\bar{T}_2} \circ \Phi_{-\bar{T}_2}^0,$$

где

$$T_1 = \bar{T}_1 + t; \quad T_2 = \bar{T}_2 - t.$$

2. Так как  $S$ -преобразование коммутирует с  $\Phi_t^0$ , то оно оставляет инвариантной алгебру  $\{H_0\}'$ , но только таким образом, что каждый элемент пересечения  $\{H_0\}' \cap \{H\}'$  переходит в себя под действием  $S$ -преобразования. Если  $H_0 = |\mathbf{p}|^2/2$ , то  $\mathbf{p}$  принадлежит  $\{H_0\}'$  и  $S(\mathbf{p}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_T(\mathbf{p})$  задает изменение импульса при рассеянии. Что касается других величин, то  $S$  не обязательно задает их изменение под действием  $\Phi$  за долгое время. Например, могут быть функции, инвариантные относительно  $\Phi_t$ , но изменяющиеся под действием  $S$ ; радиальный импульс  $p_r$  может оставаться неизменным, хотя под долговременным действием и  $\Phi$  и  $\Phi^0$  он изменяет знак.

3. Часто рассматривают преобразование  $S_H = \Omega_+ \circ \Omega_-^{-1}$  — так называемое  $S$ -преобразование в представлении Гейзенберга. Оно отличается от  $S$  при замене  $H$  на  $H_0$  и наоборот. Поэтому  $S_H$  коммутирует с  $\Phi_t$  и преобразует не прямую в прямую, а одну траекторию отображения  $\Phi_t$  в другую.  $S_H$  существует, если  $D_+ = D_-$ , и отображает  $\mathcal{R}_-$  на  $\mathcal{R}_+$ .

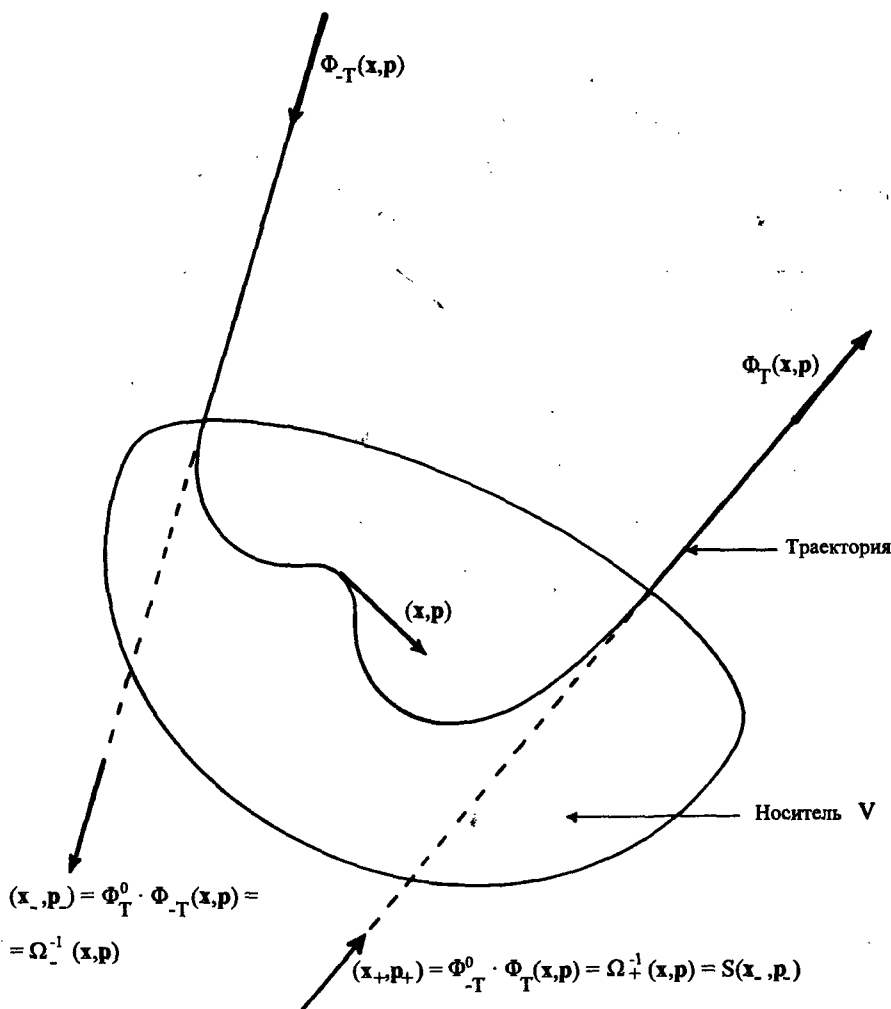


Рис. 3.16. Смысл S-преобразования

**Примеры (3.4.11)****1. Одномерное движение:**

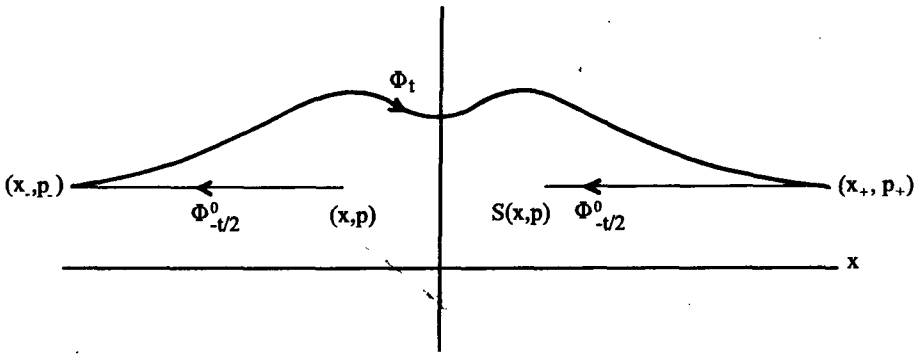
Пусть  $H_0 = p^2/2$ ,  $H = p^2/2 + V(x)$ , где  $V$  при  $|x| \rightarrow \infty$  убывает, как  $|x|^{-1-\epsilon}$ ,  $\epsilon > 0$ . Тогда

$$\Phi_t^0(x, p) = (x + pt, p), \quad \Phi_t(x, p) = \left( x(t), \{p^2 + 2(V(x) - V(x(t)))\}^{1/2} \right),$$

где  $x(t)$  определяется неявно из соотношения

$$t = \int_x^{x(t)} \frac{d\alpha}{\{p^2 + 2(V(x) - V(\alpha))\}^{1/2}}.$$

Предполагаем, что  $p^2 + 2V(x) > 2 \sup_{\alpha} V(\alpha)$ , в силу чего сохраняется неравенство  $p(t) > 0$  и частица не отражается от потенциала. Цепочка отображений  $\Phi_{-t/2}^0 \circ \Phi_t \circ \Phi_{-t/2}^0$ ,

Рис. 3.17.  $S$ -преобразование в двумерном фазовом пространстве

в обозначениях  $(x_l, p_l) = \Phi_{-t/2}^0(x, p) = (x - pt/2, p)$ ,  $(x_r, p_r) = \Phi_t(x_l, p_l)$  (рис.3.17) и  $V_{\pm} = V(x_{\pm})$ , запишется в виде  $(x, p) \xrightarrow{\Phi_{-t/2}^0} (x - \frac{pt}{2}, p) \xrightarrow{\Phi_t} (x - \frac{pt}{2} + \int_{x_l}^{x_r} d\alpha, \{p^2 + 2V_l - 2V_r\}^{1/2}) \xrightarrow{\Phi_{-t/2}^0} (x - \frac{t}{2}(p + \{p^2 + 2V_l - 2V_r\}^{1/2}) + \int_{x_l}^{x_r} d\alpha, \{p^2 + 2V_l - 2V_r\}^{1/2})$ . При  $t \rightarrow \infty$  имеем  $x_l \rightarrow -\infty$ ,  $x_r \rightarrow +\infty$ ,  $V_{l,r} \rightarrow 0$  и, полагая

$$t = \int_{x_l}^{x_r} \frac{d\alpha}{\{p^2 + 2V_l - 2V(\alpha)\}^{1/2}},$$

получаем  $S(x, p) = (x - p \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha [\{p^2 - 2V(\alpha)\}^{-1/2} - \{p^2\}^{-1/2}], p) =: (x - \tau p, p) \equiv (\bar{x}, \bar{p})$ .

Так как траектории отображения  $\Phi_t^0$  — прямые линии, то  $S$ -преобразование может быть только вида  $x \rightarrow x + f(p)$ ,  $p \rightarrow p$ . Определенная выше величина  $\tau$  называется **временем запаздывания**. По предположению,  $\tau$  задается сходящимся интегралом и имеет наглядный смысл разности времен, необходимых отображениям  $\Phi_t$  и  $\Phi_t^0$ , чтобы при  $t \rightarrow \infty$  перевести  $(x_l, p_l)$  в  $(x_r, p_r)$ . Так как  $S$  — каноническое преобразование  $(x, p) \rightarrow (\bar{x}, \bar{p})$ , то оно имеет производящую функцию

$$f(\bar{x}, p) = \bar{x}p - 2\delta(p) : (\bar{x}, \bar{p}) = \left( x - 2 \frac{\partial \delta(p)}{\partial p}, \bar{p} \right),$$

где

$$\delta(p) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \left\{ [p^2 - 2V(\alpha)]^{1/2} - [p^2]^{1/2} \right\}.$$

## 2. Радиальная сила в двумерном случае:

$$H_0 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2}, \quad H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} + V(|\mathbf{x}|).$$

С помощью точечного преобразования можно перейти к полярным координатам

$$r = |\mathbf{x}|, \quad \varphi = \arccos \frac{x}{r}, \quad p_r = \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}{r}, \quad L = |\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}|$$

или, поменяв местами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{p}$ , ввести переменные

$$a = \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}{p}, \quad \chi = \arccos \frac{p_x}{p}, \quad p = |\mathbf{p}|, \quad L = |\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}|.$$

Разумеется, последнее преобразование также каноническое (хотя и не точечное), поэтому всегда имеем две пары канонических переменных  $(r, \varphi; p_r, L)$  и  $(a, \chi; p, L)$ . Изображая точки в  $T^*(\mathbb{R}^2)$  как векторы  $\mathbb{R}^2$ , нетрудно понять геометрический смысл этих переменных (рис. 3.18).

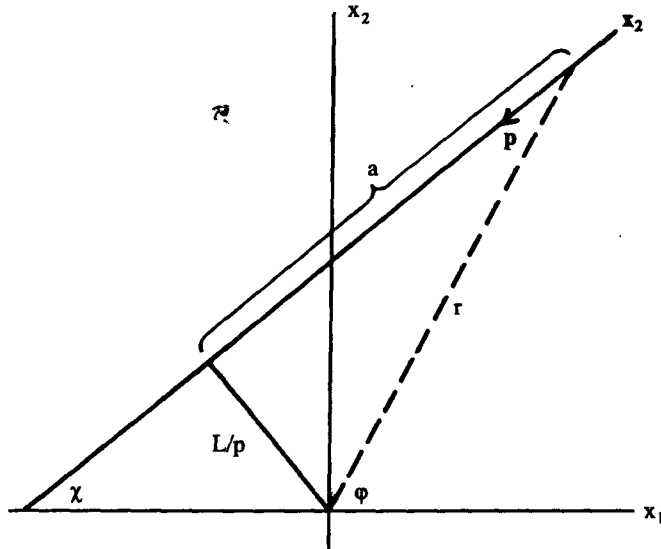


Рис. 3.18. Геометрический смысл переменных  $a$  и  $\chi$

$\Phi_t^0$  особенно просто записывается в координатах второй пары:  $(a, \chi; p, L) \rightarrow (a+pt, \chi; p, L)$ , так как

$$H_0 = \frac{p_r^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2} = \frac{p^2}{2}, \quad H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2} + V(r) = \frac{p^2}{2} + V\left(\sqrt{a^2 + L^2/p^2}\right).$$

Поскольку  $S$ -преобразование коммутирует с  $\Phi_t^0$  и  $L \in \{H_0\}' \cap \{H\}'$ , то оно должно иметь вид  $(a, \chi; p, L) \rightarrow (a - \tau(p, L)p, \chi'; p, L)$ , или, как каноническое преобразование,  $S$ -преобразование можем записать следующим образом:

$$(a, \chi; p, L) \rightarrow \left( a - 2 \frac{\partial \delta(p, L)}{\partial p}, \chi - 2 \frac{\partial \delta(p, L)}{\partial L}; p, L \right).$$

Как и в примере (3.4.11,1), для определения производящей функции  $\delta$  снова обратимся к преобразованиям  $\Phi_{-t/2}^0 \circ \Phi_t \circ \Phi_{-t/2}^0$  и получим

$$\tau p = 2 \frac{\partial \delta(p, L)}{\partial p} = \lim_{|a_{\pm}| \rightarrow \infty} \left( tp - \int_{a_-}^{a_+} da \right).$$

Здесь  $t$  — время, которое требуется, чтобы по траектории отображения  $\Phi_t$  перейти из точки  $(\mathbf{x}_-, \mathbf{p}_-)$  в точку  $(\mathbf{x}_+, \mathbf{p}_+)$ . Удобнее всего выразить  $t$  в полярных координатах. Из

того что  $\dot{r} = p_r$  и  $H = \text{const} \rightarrow p^2/2$  при  $V(x_{\pm}) \rightarrow 0$ , получаем

$$t = \int_{r_0}^{r_-} \frac{dr}{\sqrt{p^2 - L^2/r^2 - 2V(r)}} + \int_{r_0}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{p^2 - L^2/r^2 - 2V(r)}},$$

где выражение под знаком квадратного корня считается равным нулю при  $r = r_0$ . Чтобы выразить в этих переменных интеграл  $\int_{a_-}^{a_+} da$ , воспользуемся соотношением  $a_{\pm} = \sqrt{r_{\pm}^2 - L^2/p_{\pm}^2}$ , или, в том случае когда величина  $p_{\pm}$  уже достигла своего асимптотического значения  $p$ , равенством

$$\int_{a_-}^{a_+} da = \left( \int_{L/p}^{r_+} + \int_{L/p}^{r_-} \right) \frac{p dr}{\sqrt{p^2 - L^2/r^2}}.$$

Таким образом, в итоге получаем

$$\tau = 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{r_0}^R \frac{dr}{\sqrt{p^2 - L^2/r^2 - 2V(r)}} - \int_{L/p}^R \frac{dr}{\sqrt{p^2 - L^2/r^2}} \right\}.$$

Это соотношение определяет  $\partial\delta/\partial p$ . Так как угол рассеяния  $2\partial\delta/\partial L$  при  $p \rightarrow \infty$  стремится к нулю, то он не содержит аддитивного члена, который бы зависел только от  $L$ ,

$$\delta(p, L) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{r_0}^R dr \sqrt{p^2 - L^2/r^2 - 2V(r)} - \int_{L/p}^R dr \sqrt{p^2 - L^2/r^2} \right\}.$$

При  $V(r) = \alpha/r^2$ , как и в примере (3.4.6,3), интеграл может быть взят в явном виде

$$\delta(p, L) = \frac{\pi}{2} \left( \sqrt{L^2 + 2\alpha} - L \right).$$

Угол рассеяния оказывается равным  $-\pi(L/\sqrt{L^2 + 2\alpha} - 1)$ , как это следует из  $\Omega_+^{-1} \circ \Omega_-$ . В случае притяжения  $\alpha < 0$  угол рассеяния стремится к бесконечности для тех  $L$ , траектории которых по спирали входят в силовой центр. Следовательно, если  $L^2 \leq 2\alpha$ , то  $\Phi_t$  не существует более  $\forall t$ . Так как  $\delta$  не зависит от  $p$ , то  $\tau = 0$ . При  $\alpha > 0$  (соответственно,  $\alpha < 0$ ) укорачивание (соответственно, удлинение) траектории относительно свободной траектории можно компенсировать уменьшением (соответственно, увеличением) скорости, поэтому никакого запаздывания не происходит.

### 3. Эффективная масса, зависящая от положения:

$$M = \mathbb{R}, \quad H_0 = \frac{p^2}{2}, \quad H = \frac{p^2}{2} \frac{x^4}{(1+x^2)^2}.$$

Как одномерная, рассматриваемая гамильтонова система интегрируема. Ее траектории — кривые  $H = E = \text{const}$  в  $T^*(M)$ , следовательно,  $p = \pm \sqrt{2E(1+1/x^2)}$ . Так как при  $x = 0$  эффективная масса обращается в бесконечность, то траектории в этой точке

заканчиваются “тупиком”. Найти  $\Phi_t$  также не составляет труда. При  $p > 0$  имеем  $\dot{x}(1 + 1/x^2) = \sqrt{2E}$ . Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$x(t) = \frac{1}{2} \left\{ x_0 - \frac{1}{x_0} + t\sqrt{2E} \pm \sqrt{\left(x_0 - \frac{1}{x_0} + t\sqrt{2E}\right)^2 + 4} \right\}$$

при  $x_0 \geq 0$ . При  $p < 0$  знак члена  $\sqrt{2E}$  изменяется на противоположный. В квадрантах I ( $x > 0, p > 0$ ) и III ( $x < 0, p < 0$ ) эволюция во времени при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически стремится к свободной эволюции  $x - pt \rightarrow \text{const}$ ,  $p \rightarrow \pm\sqrt{2E}$ , для квадрантов II и IV то же происходит при  $t \rightarrow -\infty$ . Так как при больших  $t$  и  $p > 0$   $\Phi_t^0$  приводит к  $x > 0$ , а при  $p < 0$  — к  $x < 0$ , то предел  $\Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi_{-t} \circ \Phi_t^0$  существует при условии, что  $p \neq 0$ , следовательно,  $D_+ = D_- = T^*(\mathbb{R}) \setminus \{\mathbb{R} \times 0\}$ . Однако  $\mathcal{R}_+ = \text{I} \cup \text{III}$  и  $\mathcal{R}_- = \text{II} \cup \text{IV}$  не только различны, но и заполняют расположенные накрест квадранты (рис. 3.19). Соответственно преобразование  $S = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{-t}^0 \circ \Phi_{2t} \circ \Phi_{-t}^0$  нигде не существует, в то время

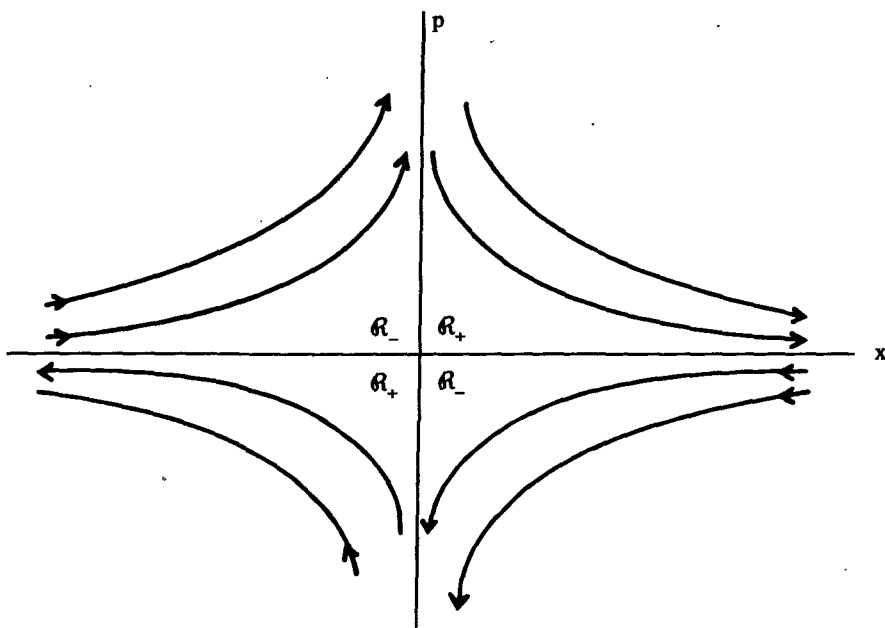


Рис. 3.19. Область  $\mathcal{R}$  системы, в которой  $S$  не существует

как преобразование  $S_H = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_{-t}^0 \circ \Phi_{2t}^0 \circ \Phi_{-t}^0$  существует на  $\mathcal{R}_-$  и отображает  $\mathcal{R}_-$  на  $\mathcal{R}_+$ .

#### Примечания (3.4.12)

1. В определении  $S$ -преобразования мы потребовали асимптотическую полноту в сильной форме  $\mathcal{R}_+ = \mathcal{R}_-$ . Такое предположение выполняется для “безобидных” потенциалов после исключения из  $T^*(M)$  некоторых траекторий. В общем случае асимптотическую полноту не гарантирует ни существование  $\Omega_{\pm}$ , ни даже обратимые во времени гамильтоновы системы. Это видно из примера (3.4.11,3), в котором существование открытых множеств определения  $D_+ = D_-$  волновых операторов  $\Omega_{\pm}$  и существование преобразования  $S_H$  не гарантируют существование  $S$ -преобразования.

2. В двумерном случае  $\tau$  — разность между временем, измеренным на реальной (истинной) траектории, и временем, измеренным на отрезках  $b_1$  и  $b_2$  свободных траекторий, касательных к реальной траектории (рис. 3.20). Поскольку  $|b_1| = |b_2| = |b_3|$ , то  $\tau$  можно интерпретировать как разность между временем пребывания в большом круге, описанном вокруг силового центра, при сравнении истинной и свободной траекторий.

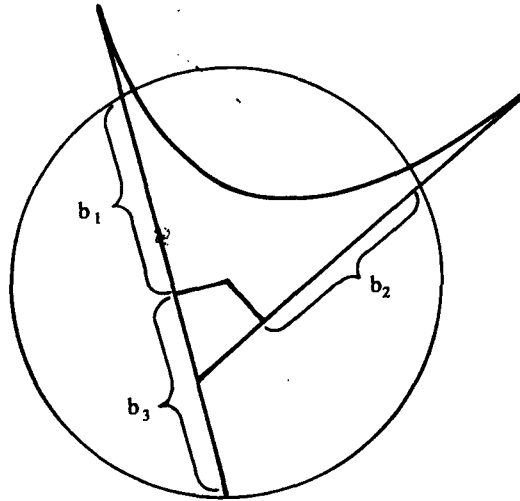


Рис. 3.20. Построение времени запаздывания в центральном потенциале

3. Формулы для  $\delta$  из примеров (3.4.11,1-2) играют роль в квантовой теории под названием “квазиклассическое приближение для сдвига фазы”. Хотя в квантовой теории это приближение не контролируемо, однако в классической теории рассеяния оно дает точное представление производящей функции для  $S$ .
4. Приведенная в примерах (3.4.11,1-2) форма производящих функций следует из (3.2.9) и их аддитивности при композиции отображений. В обозначениях примера (3.4.11,1) и из равенства  $(x_s, p_s) = \Phi_{-t/2}^0(x_+, p_+)$  имеем

$$p_- dx_- = p dx + dW_-^0, \quad p_+ dx_+ = p_- dx_- + dW, \quad p_s dx_s = p_+ dx_+ + dW_+^0.$$

При этом

$$W_-^0 = - \int_{-t/2}^0 dt' \Phi_{t'}^0 \left( \frac{p_-^2}{2} \right) = - \frac{t}{2} \frac{p_-^2}{2},$$

$$W = \int_0^t dt' \left\{ \Phi_{t'} \left( \frac{p_-^2}{2} \right) - V(\Phi_{t'}(x_-)) \right\} \rightarrow \int_{x_-}^{x_+} dx' \sqrt{p^2 - 2V(x')} - t \frac{p^2}{2}.$$

Если  $t$  уже столь велико, что  $V(x_-)$  стремится к нулю, а  $\{ \} = \Phi_{t'}(p_-^2) - E = p_-^2 + 2V(x_-) - 2V(\Phi_{t'}(x_-)) - E$  к  $p^2 - 2V(\Phi_{t'}(x_-)) - p^2/2$ , тогда при больших  $t$  имеем

$$W_+^0 = - \int_{-t/2}^0 dt' \Phi_{t'}^0 \left( \frac{p_+^2}{2} \right) = - \frac{t}{2} \frac{p_+^2}{2}.$$



Суммируя уравнения для 1-форм, получаем

$$p_s dx_s = p dx + d \left( \int_{x_-}^{x_+} dx' [p^2 - 2V(x')]^{1/2} - tp^2 \right).$$

Однако  $pt = x_+ - x_- - (x_s - x)$  или  $-tp^2 = - \int_{x_-}^{x_+} dx p + p(x_s - x)$ , следовательно,  $p_s dx_s = p dx + d((x_s - x)p + 2\delta(p))$  или  $x_s = x - 2 \frac{\partial \delta(p)}{\partial p}$ . Приведенные нами прямые вычисления производящих функций допускают обобщение и на большее число измерений.

В качестве канонических переменных,  $S$  и  $\Omega_{\pm}$  сохраняют объем в фазовом пространстве. Может показаться, будто это противоречит тому, что  $\Omega_{\pm}$  отображает почти все фазовое пространство на дополнение к траекториям, остающимся в конечной части пространства, т.е. на нечто действительно меньшее. Парадокс легко разрешается, если заметить, что речь идет о двух бесконечных объемах. Это приводит нас к следующей теореме.

### Теорема Левинсона классической теории рассеяния (3.4.13)

Пусть  $M = \mathbb{R}$  и  $\chi_b : T^*(M) \rightarrow \mathbb{R}$  — характеристическая функция множества  $b = \bigcup_n b_n$  траекторий, остающихся в конечной части пространства, и  $V \in C_0^{\infty}$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx dp \chi_b(x, p) = - \int_{-\infty}^{\infty} dp |p| \tau(p).$$

### Доказательство

Рассмотрим образ прямоугольника  $|x| < R$ ,  $0 < p < R'$  относительно отображения  $\Omega_+$ . Пусть  $R$  столь велико, что  $\text{supp } V \subset \{x : |x| < R\}$ . Тогда на сторону  $x = R$  отображение  $\Omega_+$  действует как 1, на сторону  $x = -R$  — как  $S^{-1}$ , сторона  $p = 0$  оказывается поднятой над областью конечных траекторий, а сторона  $p = R'$  переходит в  $\sqrt{R'^2 - 2V(x)}$  и, следовательно, остается инвариантной при  $R' \rightarrow \infty$  (рис. 3.21). При  $R, R' \rightarrow \infty$  объем образа прямоугольника отличается от старого объема на область траекторий, остающихся в конечной части пространства, и на интеграл по  $\tau p$ . Вместе с аналогичными рассуждениями для  $p < 0$  это завершает доказательство теоремы.  $\square$

### Примечания (3.4.14)

1. Теорема Левинсона была впервые доказана в ее квантовомеханическом варианте с помощью интегрирования по комплексной переменной, в результате чего геометрический смысл теоремы оказался утраченным.
2. Теорему Левинсона нетрудно обобщить на более широкие классы потенциалов. В случае более высоких размерностей появляются поправочные члены.

Итак,  $S$ -преобразование определяет угол между  $\mathbf{p}_- := \tau_- \mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_+ := \tau_+ \mathbf{p}$ :  $S_*(\mathbf{p}_-) = \mathbf{p}_+$ . Так как экспоненциальные траектории принято рассматривать статистически, то необходимо следующее определение.

### Определение (3.4.15)

Угол  $\Theta$  между  $\mathbf{p}_-$  и  $\mathbf{p}_+$  называется углом рассеяния, а под дифференциальным сечением рассеяния принято понимать величину  $d\sigma = (\text{число частиц, рассеянных в единицу}$

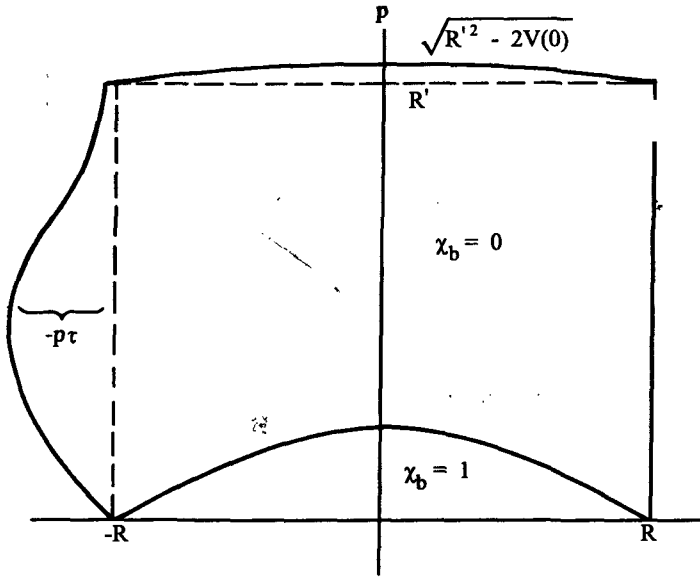


Рис. 3.21. Геометрический смысл теоремы Левинсона

времени в пространственный угол  $[\Theta, \Theta + d\Theta] \times [\varphi, \varphi + d\varphi]$  (число частиц, налетающих в единицу времени на единичную поверхность) $^{-1} = \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta d\varphi$ .

#### Примечания (3.4.16)

1. Если первоначальное (ненормированное) распределение  $\rho$  (см. (1.3.1)) задает точное значение  $\mathbf{p}_-$ , однако оставляет совершенно неопределенным значение  $\mathbf{x}$ , т.е. выполняется соотношение  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \cong \delta^3(\mathbf{p}_- - \mathbf{k})$ , то для прицельного параметра  $b = |\mathbf{L}|/|\mathbf{p}_-|$  это дает распределение  $2\pi b db \cdot f$ , где  $f$  — число частиц, налетающих на единичную поверхность за единицу времени (рис. 3.22). Число частиц, рассеянных за единицу времени, для центрального потенциала (если масса  $m$  не равна 1, энергию  $E$  следует заменить на  $mE$ ) равно

$$f 2\pi b db = f \frac{2\pi}{4E} d|\mathbf{L}|^2 = \frac{f\pi}{E} L \left| \frac{dL}{d\Theta} \right| d\Theta = f 2\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta,$$

где зависимость между  $\Theta$  и  $L$  должна быть известной и биективной.

2. Если в  $\mathbb{R}^2$  единичную поверхность заменить единичной длиной и, соответственно, произвести замену  $2\pi b db \rightarrow db$ ,  $\sin \Theta d\Theta d\varphi \rightarrow d\Theta$ , тогда

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2E}} \left| \frac{dL}{d\Theta} \right|.$$

#### Примеры (3.4.17)

1. Потенциал  $1/r^2$  в  $\mathbb{R}^2$ . Как следует из (3.4.11,2),

$$\begin{aligned} \Theta &= \pi(1 - L(2\alpha + L^2)^{-1/2}) \Rightarrow \\ L^2 &= 2\alpha \frac{(\Theta - \pi)^2}{\Theta(2\pi - \Theta)} \Rightarrow \sigma(\Theta) = \sqrt{\frac{\alpha}{E}} \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{\pi - \Theta}{\sqrt{\Theta(2\pi - \Theta)}}. \end{aligned}$$

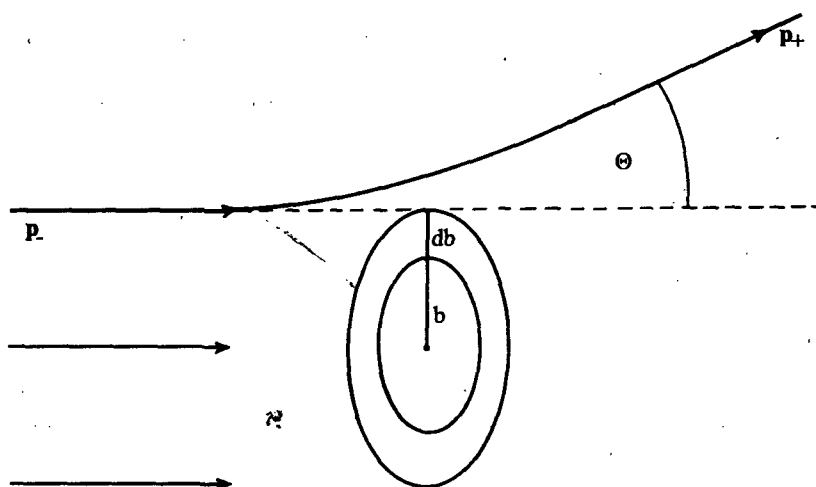


Рис. 3.22. Угол рассеяния и дифференциальное сечение рассеяния

2. Потенциал  $1/r^2$  в  $\mathbb{R}^3$ . Задача с помощью закона сохранения углового момента (момента импульса) сводится к плоской (см. параграф 5.3), в результате чего  $L$  становится такой же функцией угла рассеяния  $\Theta$ , как в примере (3.4.17,1), и поэтому имеем

$$\sigma(\Theta) = \frac{\alpha}{2E \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{(\pi - \Theta)^2}{\Theta(2\pi - \Theta)}.$$

#### Примечания (3.4.18)

1. Угловое распределение сильно вытянуто вперед и при  $\Theta \rightarrow 0$  становится неинтегрируемым (сингулярным). Это связано с тем, что при сколь угодно большом прицельном параметре  $b$  частицы все еще претерпевают рассеяние, хотя и не очень сильное.
2. Как и следует ожидать,  $\sigma \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Сечение в  $\mathbb{R}^3$  линейно по  $\alpha$  потому, что только  $\sqrt{\alpha/E}$  имеет размерность длины.
3. Независимость  $\Theta$  от  $E$  обусловлена тем, что каноническое преобразование  $x \rightarrow \lambda x$ ,  $p \rightarrow \lambda^{-1}p$  переводит  $H$  в  $\lambda^{-2}H$ , но оставляет инвариантным  $\Theta$ .

Рассмотрев траектории, уходящие в бесконечность, перейдем теперь к рассмотрению таких траекторий, которые всегда остаются в компактных окрестностях положения равновесия. Можно надеяться, что для таких траекторий полезной основой для сравнения послужит линеаризованная теория (3.3.16,3). Интуитивные представления об устойчивости положения равновесия сводим в следующем общем определении.

#### Определение (3.4.19)

Пусть  $S$  — отображение топологического пространства  $M$  в себя, и  $S(p) = p \in M$  (неподвижная точка). Отображение  $S$  называется устойчивым, если существует сколь угодно малая окрестность  $U$  точки  $p$ , такая, что  $SU \subset U$ . Если  $M$  и  $\{p\}$  — единственные содержащие точку  $p$  подмножества, обладающие этим свойством, то  $S$  называется неустойчивым отображением.

## Примечания (3.4.20)

1. Если односточечных окрестностей не существует, то **неустойчивость означает не устойчивость**, но не наоборот. Например, при  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $p = \{0\}$  отображение  $S : (x, y) \rightarrow (x + y, y)$  ни устойчиво, ни неустойчиво. Такие отображения будем называть **смешанными**.
2. Если  $S$  — эволюция во времени  $\Phi_t$ , взятая в момент времени  $t$ , то из группового свойства следует, что  $\Phi_{nt}U \subset U \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ . В то время как общие теоремы о дифференциальных уравнениях утверждают лишь, что за короткое время траектория не слишком удаляется от  $p$ , тогда как устойчивость требует, чтобы так было и при сколь угодно больших временах. Если ничто другое явно не оговорено, то будем понимать под устойчивостью отображения  $\Phi_t$  его устойчивость  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

В случае периодических движений никакой сходимости при  $t \rightarrow \pm\infty$  ожидать не приходится, и для определения среднего по времени поведения системы предположим, что  $T^*(M)$  совпадает с  $\mathbb{R}^{2m}$ . Это позволит нам установить, что такое сумма двух точек и, тем самым, что такое сумма диффеоморфизмов. Для этого нам понадобится следующее определение.

## Определение (3.4.21)

Пусть на  $\mathbb{R}^{2m}$  заданы канонические потоки  $\Phi_t$  и  $\Phi_t^0$ . Линейная структура пространства  $\mathbb{R}^{2m}$  задает  $(\Phi_1 + \Phi_2)(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$  и тем самым интеграл диффеоморфизмов. Тогда

$$C_{\pm} = \lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \Phi_{-t}^0 \circ \Phi_t$$

в предположении, что это среднее в смысле **Чезаро** существует в окрестности  $R_{\pm} \subset \mathbb{R}^{2m}$  и является там локальным каноническим преобразованием.

## Примечания (3.4.22)

1. Если существует  $\Omega_{\pm}$ , то  $C_{\pm}$  также существует и совпадает с  $\Omega_{\pm}^{-1}$ , но обратное утверждение не всегда верно.
2. Если  $\bigcup_t \Phi_{-t}^0 \circ \Phi_t$  ограничено, т.е. если  $\bigcup_t \Phi_{-t}^0 \circ \Phi_t(x)$  — ограниченное множество в  $\mathbb{R}^{2m} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2m}$ , и отображение  $\Phi_t^0$  линейно, то  $C_{\pm}$  имеет то же назначение, что и  $\Omega_{\pm}$ , так как канонически отображает друг на друга оба потока. Действительно,

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau}^0 \circ C_{\pm} &= \lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \Phi_{-t+\tau}^0 \circ \Phi_t = \lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T-\tau} dt' \Phi_{-t'}^0 \circ \Phi_{t'} \circ \Phi_{\tau} = \\ &= C_{\pm} \circ \Phi_{\tau} + \lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \int_{-\tau}^0 dt' (\Phi_{-t'}^0 \circ \Phi_{t'} - \Phi_{-T-t'}^0 \circ \Phi_{T+t'}) \circ \Phi_{\tau}, \end{aligned}$$

и последний член стремится к нулю.

## 3. Предел

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \Phi_{-t}^0 \circ \Phi_t dt$$

часто также совпадает с  $C_{+}$ , но работать с ним удобнее.

Отображение  $C_{\pm}$  позволяет свести вопрос об устойчивости отображения  $\Phi_t$  к вопросу об устойчивости отображения  $\Phi_t^0$ . Если  $(x, p)$  рассматривать как одну переменную  $z$  и  $z = 0$  — неподвижная точка уравнений Гамильтона, то последние при комплексном аналитическом  $X_H$  представимы в виде

$$\dot{z} = f(z) = Az + \dots, \quad (3.4.23)$$

где  $A$  — постоянная матрица, а многоточие означает члены более высокого порядка ряда Тейлора. В основе линеаризованной теории лежит уравнение  $\dot{z} = Az$ , которое порождает поток сравнения  $\Phi_t^0 : z \rightarrow e^{tA} z$ . Имеет место следующий признак устойчивости.

#### Признак устойчивости для аналитических векторных полей (3.4.24)

Пусть  $\Phi_t$  — поток аналитического векторного поля на  $\mathbb{C}^m$  с неподвижной точкой  $0$  и линейной частью  $A$ . Поток  $\Phi_t$  при  $z = 0$  устойчив (при  $t \rightarrow \pm\infty$ ) в том и только в том случае, если:

?

- (i) матрица  $A$  диагонализуема и имеет чисто мнимые собственные значения;
- (ii)  $C_{\pm}$  существует в некоторой окрестности  $\mathcal{R}_{\pm}$  нуля.

#### Примечания (3.4.25)

1. Так как  $\Phi_t^0$  — канонический поток, возникающий из разложения функции Гамильтона  $H$  в ряд Тейлора, то  $e^{tA}$  — симплектическая матрица. Отсюда еще не следует, что  $e^{tA}$  и  $A$  диагонализуемы (например,  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — симплектическая матрица, но она не диагонализуема); диагонализуемость следует предполагать в явном виде. Необходимо различать следующие два случая:  $A$  — диагонализуемая матрица  $\Leftrightarrow A = T$  (диагональная матрица)  $T^{-1}$ ,  $T \in GL(m, \mathbb{C}) \Leftrightarrow$  любому  $n$ -кратно вырожденному собственному значению соответствуют  $n$  линейно независимых собственных векторов и  $A$  — унитарно диагонализуемая матрица ( $T$  — унитарная матрица)  $\Leftrightarrow AA^t = A^t A$ , (т.е.  $A$  — нормальная матрица)  $\Leftrightarrow$  любому  $n$ -кратно вырожденному собственному значению соответствуют  $n$  ортогональных собственных векторов (см. также (3.1.13,4)).
2. Часть (1) теоремы (3.4.24) содержит необходимый признак устойчивости, восходящий к А.М. Ляпунову. Он относится не только к гамильтоновым векторным полям и гласит:
  - а) все собственные значения матрицы  $A$  имеют действительную часть  $< 0 \Rightarrow$  устойчивость при  $t \rightarrow \infty$ ;
  - б) по крайней мере одно собственное значение матрицы  $A$  имеет действительную часть  $> 0 \Rightarrow$  неустойчивость при  $t \rightarrow \infty$ .

Из (3.1.8,2) следует, что для канонических потоков реализуется только утверждение б), но для устойчивости не достаточно, чтобы все собственные значения были чисто мнимыми, как показывает пример потока  $\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2)$ ,  $\dot{y} = x + y(x^2 + y^2)$  в  $\mathbb{R}^2$ . Неподвижная точка  $(x, y) = (0, 0)$  неустойчива, так как в полярных координатах уравнения потока могут быть записаны в виде  $\dot{r} = r^3$ ,  $\dot{\Phi} = 1$ . Эти уравнения имеют решение  $r(t) = r(0)(1 - r(0)^2 2t)^{-1/2}$ ,  $\Phi(t) = \Phi(0) + t$ . При  $r(0) \neq 0$  частица по спирали удаляется в бесконечность, в то время как матрица  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  линеаризованных уравнений диагонализуема и имеет собственные значения  $\pm i$ . Нетрудно видеть, что условие б) при этом не выполняется.

3. Признак (3.4.24,ii) показывает, к скольким важным следствиям приводит предположение об аналитичности и устойчивости в комплексной плоскости. Грубо говоря, в нем утверждается, что устойчивые потоки линейны, хотя и, возможно, в сложных координатах. Этот признак не очень полезен при установлении устойчивости заданной системы, так как он не проще, чем доказательство существования отображения  $C_{\pm}$ . Существует несколько других признаков устойчивости, но, к сожалению, они не применимы к тем гамильтоновым системам, которые интересуют нас в этой главе.

### Доказательство утверждения (3.4.24)

- а) (i) и (ii)  $\implies$  устойчивость.

Как и в случае  $\Omega_t$ , можем предположить, что  $\mathcal{R}_{\pm}$  инвариантны относительно  $\Phi_t$ , а  $C_{\pm}$  диффеоморфно отображает этот поток на  $e^{tA}$ . Так как устойчивость определена чисто топологически, то она сохраняется при диффеоморфизмах, и нам требуется лишь исследовать устойчивость  $e^{tA}$ . Она гарантируется условием (i) (см. следующий пример и задачу (3.4.27,5)).

- б) Условие (ii) выполняется, условие (i) не выполняется  $\implies$  неустойчивость.

Если условие (i) не выполняется, а  $\Phi_t^0$  не устойчиво в  $\{0\}$ , то в силу рассуждений, аналогичных приведенным в а),  $\Phi_t$  также не устойчив.

- в) Устойчивость  $\implies$  (ii). Эта часть доказательства несколько более громоздка, и здесь ее не приводим (см. [14]).  $\square$

### Примеры (3.4.26)

1. Пусть  $T^*(M) = \mathbb{R}^2$ . Исследуем вид матрицы  $e^{tA}$ . Дифференцируя матричное равенство  $e^{tA^t} W e^{tA} = W$  (см. (3.1.8,2)), получаем условие  $A^t W + W A = 0$ . Ясно, что это условие достаточно, чтобы выполнялось первое уравнение. Так как

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b-c & -a \end{pmatrix},$$

то ее собственные значения равны  $\pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ . Необходимо различать следующие случаи:

- (i)  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ ,  $\Phi_t^0$  действует как растяжение:

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} T^{-1}, \quad e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t} \end{pmatrix} T^{-1};$$

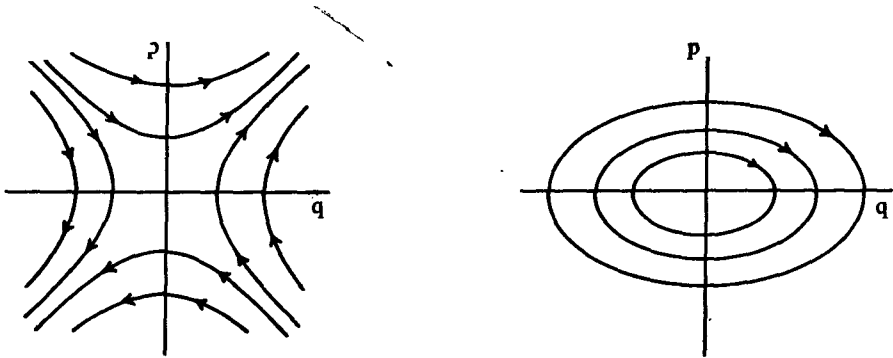
- (ii)  $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ ,  $\Phi_t^0$  действует как вращение:

$$A = T \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} T^{-1}, \quad e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} T^{-1};$$

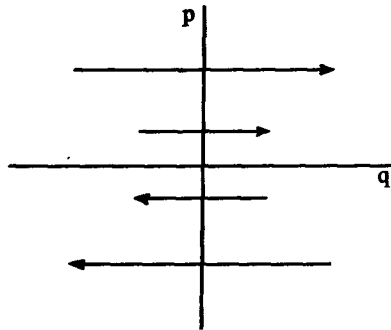
- (iii)  $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ ,  $\Phi_t^0$  действует как линейный поток:

$$A = T \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}, \quad e^{At} = T \begin{pmatrix} 1 & \lambda t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Здесь  $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $T$  — преобразование подобия. Неподвижная точка  $0$  в случае (i) неустойчивая (гиперболическая, осциллятор с мнимой частотой), в случае (ii) — устойчивая (эмпирическая, осциллятор с действительной частотой) и в случае (iii) — смешанная (линейная, осциллятор с нулевой частотой). Соответствующие траектории в фазовом пространстве представлены на рис. 3.23. Заметим, что канонический поток может не иметь ни источников, ни стоков, он сохраняет объем. Если канонический поток в одном направлении производит сжатие, то в другом — растяжение.



i) Гиперболическая неподвижная точка      (ii) Эллиптическая неподвижная точка



(iii) Неподвижная точка смешанного типа

Рис. 3.23

2. Пусть в обозначениях  $z = q + ip$ , как и в (3.4.23),

$$H_0 = \frac{|z|^2}{2}, \quad H = \frac{|z - z_0|^2}{2}.$$

Тогда  $\Phi_t^0(z) = e^{-it}z$ ,  $\Phi_t(z) = e^{-it}(z - z_0) + z_0$ , и, следовательно,  $\Phi_t^0 \circ \Phi_t(z) = z - z_0 + e^{-it}z_0$ . Поэтому  $C_{\pm}(z) = z - z_0$  и  $C$  действительно преобразуют  $H_0$  в  $H$ .

.. Пусть в обозначениях примера (3.4.26,2) снова

$$H_0 = \frac{|z|^2}{2} \quad \text{и} \quad H = \frac{|z|^2}{2} + \frac{\lambda}{4}|z|^4.$$

Тогда  $\Phi_{-t}^0 \circ \Phi_t(z) = e^{i\lambda|z|^2 t} z$ , в силу чего  $C_{\pm}(z) = 0$ , поэтому  $C$  не существует. Такая функция Гамильтона  $H$  не порождает аналитического векторного поля  $X_H$ .

**Задачи (3.4.27)**

1. В (3.4.4) предполагалась сходимости  $\Phi_{-t} \circ \Phi_t^0$  и  $(\Phi_{-t} \circ \Phi_t^0)^{-1}$ . Найдите гомеоморфизмы  $\Omega_t$  единичного круга  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , так, чтобы при  $t \rightarrow \infty : \Omega_t \rightarrow 1$ , но  $\Omega_t^{-1} \not\rightarrow 1$  ( $\rightarrow$  означает поточечную сходимость)<sup>13</sup>.
2. Выведите формулу  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_t \circ \tau_{-t}^0 f = \Omega_{+^*}(f) = f \circ \Omega_+^{-1} = \left(1 + \int_0^{\infty} dt \tau_t \circ \tau_{-t}^0 L_{X_{\tau_t^0(H-H_0)}}\right) f$ .
3. Проверьте, что преобразование Мёллера  $(r, p) \rightarrow (\bar{r}, \bar{p})$  из (3.4.6,2) каноническое.
4. Докажите, что понятие устойчивости в (3.4.19) эквивалентно  $\forall W \exists V \subset W : SV = V$ , где  $V$  и  $W$  — окрестности.
5. Исследуйте матрицу  $e^{At}$  из (3.4.23) для свободного движения  $\dot{q}^i = p_i, \dot{p}_i = 0$  в  $\mathbb{R}^m$ .
6. Пусть в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{R}^+ \times T^1$  задана функция Гамильтона ( $\beta > 0$ )

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{2\alpha + L^2}{2r^2} - \frac{\beta}{r}$$

(релятивистская задача Кеплера). При  $E < 0$  каждая траектория заполняет всюду плотно двумерное многообразие. Обобщите приведенные в (3.4.3,3) постоянные и выясните, почему в области таких траекторий они не определены глобально.

**Решения (3.4.28)**

1. Пусть  $\Omega_t$  на  $\Gamma_t : \{(r, \varphi) : 1/t \leq r \leq 1 - 1/t, 1/t \leq \varphi \leq 2\pi\}$  совпадает с 1, а на  $S\Gamma_t$  действует так, что

$$\Omega_t|_{\partial D} = 1, \quad \Omega_t(0) = c_t \rightarrow 0, \quad \Omega_t(1 - 1/2t, 1/2t) = 0.$$

Так как  $\bigcup_t \Gamma_t = D \setminus \{0\} \setminus \partial D, \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_t(x) = x \quad \forall x \in D$ , то  $\Omega_t^{-1} \not\rightarrow 1$ , поскольку  $\Omega_t^{-1}(0) \rightarrow 1$ .

2. Пусть  $\tau_t = \exp[tL_H], \tau_t^0 = \exp[tL_{H_0}]$ . Тогда из разложения в ряд Тейлора получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tL_H} e^{-tL_{H_0}} &= e^{tL_H} (L_H - L_{H_0}) e^{-tL_{H_0}} = \\ &= e^{tL_H} L_{H-H_0} e^{-tL_{H_0}} = e^{tL_H} e^{-tL_{H_0}} L_{\tau_t^0(H-H_0)}. \end{aligned}$$

3. (См. (2.5.9,2)), окончательный результат дает интегрирование по  $t$ .

4. Нетрудно вычислить, что  $dr \wedge dp = d\bar{r} \wedge d\bar{p}$ .

5. Из (3.4.14) следует:  $S$  устойчиво  $\Leftrightarrow \forall W \exists U \subset W$  с

$$SU \subset U \Rightarrow V := \bigcup_{n \geq 1} S^n U \subset U \subset W \quad \text{и} \quad SV = V;$$

и наоборот. если  $\forall W \exists V \subset W$  с  $SV = V$ , то  $S$  устойчиво.

$$A = \left( \begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & \dots \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \end{array} \right) \Bigg\} 2m, \quad A^2 = 0 \Rightarrow e^{At} = 1 + At$$

<sup>13</sup>Этим примером я обязан В. Шмидту из университета Колорадо, Боулдер, США.



7. Находим (например, вычислив  $\varphi(r)$ )

$$\tau_+ p_x = \sqrt{2H} \cos \left( \varphi + \frac{L}{\sqrt{2\alpha + L^2}} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{pr\sqrt{2\alpha + L^2}}{L^2 + 2\alpha - \beta r} \right) \right).$$

В точке равновесия  $r = (L^2 + 2\alpha)/\beta$  аргумент арктангенса обращается в бесконечность, и возможность однозначного продолжения утрачивается. При  $\beta < 0$  величина  $\tau_+ p_x$  определена на  $T^*(M)$ .

### 3.5. Теория возмущений — первый шаг

*Непрерывное изменение функции Гамильтона  $H$  сказывается на эволюции во времени, непрерывной на конечных временах. Но величины, относящиеся к бесконечным промежуткам времени (например, постоянные движения), могут быть совершенно разрывными.*

В этой главе рассмотрим функции Гамильтона вида  $H = H_0 + \lambda H_1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , и исследуем, как изменяется динамика в зависимости от  $\lambda$ .

Прежде всего сделаем несколько замечаний относительно общего характера эволюции во времени наблюдаемых  $f \rightarrow \exp[tL_H] f$ . Исходим при этом из наиболее благоприятного случая, когда все зависимости аналитические, и почленно дифференцируем ряд для экспоненциальной функции по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{-tL_{H_0}} e^{tL_{H_0+\lambda H_1}} f &= e^{-tL_{H_0}} (L_{H_0+\lambda H_1} - L_{H_0}) e^{tL_{H_0+\lambda H_1}} f = \\ &= -\lambda e^{-tL_{H_0}} \{H_1, e^{tL_{H_0+\lambda H_1}} f\}. \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Интегрируя по  $t$ , получаем

$$e^{-tL_{H_0}} e^{tL_{H_0+\lambda H_1}} f = f - \lambda \int_0^t dt_1 \{H_1(-t_1), e^{-t_1 L_{H_0}} e^{t_1 L_{H_0+\lambda H_1}} f\}, \quad (3.5.2)$$

где

$$g(t) := e^{tL_{H_0}} g \quad (3.5.3)$$

характеризует эволюцию во времени функции Гамильтона  $H_0$ .

Оперируя с  $\exp[tL_{H_0}]$  из (3.5.2), приходим к следующей оценке.

**Оценка (3.5.4)**

$$\forall f, H, H_0 \in C_0^\infty \exists c, k \in \mathbb{R}^+ : \|e^{tL_H} f - e^{tL_{H_0}} f\| \leq c\lambda |t| e^{k|t|} \quad \forall t, \quad \text{где} \quad \|f\| = \sup_{x \in T^*(M)} |f(x)|.$$

**Примечания (3.5.5)**

1. Действие возмущения первоначально может проявляться линейно по  $t$ , но затем нарастает экспоненциально.
2. Соотношение (3.5.2) выполняется по крайней мере при  $H, H_0 \in C_0^\infty$ , что гарантирует существование потока.
3. Оценка (3.5.4) допускает обобщение на  $H = p^2 + V(x)$ ,  $V \in C_0^\infty$ . Однако она выполняется без ограничений: частицы могут убегать на бесконечность только за конечное время.

**Доказательство** оценки (3.5.4)

Из (3.5.2) заключаем, что при  $t > 0$

$$\|e^{tL_{H_0}} f - e^{tL_{H_1}} f\| \leq \lambda \int_0^t \left\| dt_1 \{H_1, e^{t_1 L_{H_1}} f\} \right\| \leq \lambda t \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \left\| \{H_1, e^{t_1 L_{H_1}} f\} \right\|.$$

Следует иметь в виду, что хотя  $\exp[t_1 L_{H_1}] f = f \circ \Phi_{t_1}$  имеет такой же спектр, как и  $f$ , однако производная  $\{ \}$ , входящая в  $d(f \circ \Phi_t) = df \circ T(\Phi_t)$ , может возрастать с  $t$ . Но рост производной ограничен групповой структурой отображения  $\Phi_t$ . Прежде всего заметим, что

$$\|\{ \}\| = \|(d(f \circ \Phi_{t_1})|_{X_{H_1}})\| \leq \|T(\Phi_{t_1})\| \circ \|df\| \circ \|X_{H_1}\|,$$

где норма  $\|\cdot\|$  векторно- или матричнозначных величин включает в себя взятие покомпонентного супремума. Из неравенства  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  следует  $\|T(\Phi_t)\| \leq c^n \quad \forall |t| \leq \pi\tau$ , где  $c = \sup_{-\tau \leq t \leq \tau} \|T(\Phi_t)\|$ . Так как остальные множители не зависят от  $t$ , то приходим к оценке

(3.5.4). □

Интегрируя (3.5.2), получаем

$$\begin{aligned} e^{-tL_{H_0}} e^{tL_{H_0+\lambda H_1}} f = \\ = f + \sum_{n=1}^{r-1} (-\lambda)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \left\{ H_1(-t_1), \{H_1(-t_2), \dots \{H_1(-t_n), f\} \dots \} \right\} + \\ + (-\lambda)^r \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{r-1}} dt_r \left\{ H_1(-t_1), \{H_1(-t_2), \dots, \{H_1(-t_r), e^{-t_r L_{H_0}} e^{t_r L_{H_1}} f\} \dots \} \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Если при  $r \rightarrow \infty$  остаточный член стремится к нулю, то из доказанного выше вытекает, что справедливо следующее разложение в ряд.

**Ряд теории возмущений** (3.5.7)

$$e^{tL_{H_0+\lambda H_1}} f = f(t) + \sum_{n \geq 1} (-\lambda)^n \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^t dt_n \left\{ H_1(t_1), \{H_1(t_2), \dots, \{H_1(t_n), f(t)\} \dots \} \right\}.$$

**Примечания** (3.5.8)

1. Если в разложении (3.5.7) удержать несколько первых членов, то может возникнуть совершенно ложная картина временной зависимости. Например, в случае осциллятора с переменной частотой при всех  $t$  справедливо неравенство  $|\sin(1+\lambda)t - \sin t| \leq 2$ , тогда как первые члены разложения в ряд Тейлора по  $\lambda$  создают ложное впечатление роста по  $t$ :  $\sin(1+\lambda)t = \sin t + \lambda t \cos t + O(\lambda^2)$ .
2. Даже если канонический поток также допускает разложение по  $\lambda$ , это отнюдь не означает, что и постоянные движения допускают такое разложение. Например, рассмотрим свободное движение на  $T^2$ :  $(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 + t\omega_1, \varphi_2 + t\omega_2)$ . При рациональном отношении частот  $\omega_1/\omega_2 = g_1/g_2$ , где  $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}$ , мы получили бы постоянные движения  $\sin(g_2\varphi_1 - g_1\varphi_2)$ . Но рациональное отношение частот может быть нарушено сколь угодно малыми изменениями частот, и тогда никакой не зависящей от времени постоянной движения уже не получится. Соответственно разложение по  $\lambda$  при  $g_1 \rightarrow g_1(1+\lambda)$  приводит к величине  $\varphi_2 g_1 \cos(g_2\varphi_1 - g_1\varphi_2)$ , которая не определена глобально.

3. В предложениях неравенства (3.5.4) существует предел  $r \rightarrow \infty$ . По аналогии с (3.5.4) можно показать, что при фиксированном  $t$  норма  $r$ -го члена ограничена  $c^r/r!$ . В этом случае ряд теории возмущений сходится так же быстро, как ряд экспоненциальной функции.

### Примеры (3.5.9)

1.  $\{H_0, H_1\} = 0$ , поэтому  $H_1(t) = H_1$ . Ряд (3.5.7) сводится к соотношению  $e^{tL_{H_0+\lambda H_1}} = e^{t\lambda L_{H_1}} e^{tL_{H_0}}$ , которое следует также из разложения в ряд по  $t$ , если принять во внимание, что  $L_{H_0+\lambda H_1} = L_{H_0} + \lambda L_{H_1}$  и  $L_{H_0}L_{H_1} = L_{H_1}L_{H_0}$ .
2. Осциллятор с вынуждающей силой

$$H_0 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \quad H_1 = q : H_1(t) = q \cos t + p \sin t,$$

$$\left\{ H_1(t_1), \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -\sin(t_1 - t) \\ \cos(t_1 - t) \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ H_1(t_1), \left\{ H_1(t_2), \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right\} \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} e^{tL_{H_1}} q &= q \cos t + p \sin t + \lambda(\cos t - 1), \\ e^{tL_{H_1}} p &= -q \sin t + p \cos t - \lambda \sin t. \end{aligned}$$

Эти соотношения дают правильное решение уравнений  $\dot{q} = p$ ,  $\dot{p} = -q - \lambda$ .

В общем случае о влиянии возмущения  $H_1$  нельзя утверждать ничего больше, чем сказано в (3.5.7). Однако для возмущений интегрируемых систем существуют более точные оценки. Пусть  $\bar{I}_j$  и  $\bar{\varphi}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , — переменные “действие — угол”. Рассмотрим

$$H(\bar{I}, \bar{\varphi}) = H_0(\bar{I}) + \lambda H_1(\bar{I}, \bar{\varphi}). \quad (3.5.10)$$

Возмущение  $H_1$  периодически зависит от  $\bar{\varphi}$  и поэтому допускает разложение в ряд Фурье

$$H_1(\bar{I}, \bar{\varphi}) = \sum_k \tilde{H}_k(\bar{I}) e^{i(\bar{\varphi}, k)}, \quad (3.5.11)$$

$$\tilde{H}_k(\bar{I}) = (2\pi)^{-m} \int d\bar{\varphi}_1 \dots d\bar{\varphi}_m e^{-i(\bar{\varphi}, k)} H_1(\bar{I}, \bar{\varphi}), \quad k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m,$$

$$(\bar{\varphi}, k) := \bar{\varphi}_1 k_1 + \bar{\varphi}_2 k_2 + \dots + \bar{\varphi}_m k_m.$$

Пользуясь производящей функцией  $S(I, \bar{\varphi})$ , подвергнем переменные  $I, \varphi$  такому каноническому преобразованию:

$$\bar{I}_j = I_j + \lambda \frac{\partial S}{\partial \bar{\varphi}_j}, \quad \varphi_j = \bar{\varphi}_j + \lambda \frac{\partial S}{\partial I_j}, \quad (3.5.12)$$

что при некотором значении  $I$ , например при  $I = 0$ , система остается интегрируемой до порядка  $\lambda$ . Для этого запишем уравнения

$$\omega_j \frac{\partial S}{\partial \bar{\varphi}_j} + H_1(I, \bar{\varphi}) = \tilde{H}_{k=0}(I), \quad \omega_j = \left. \frac{\partial H_0(I)}{\partial I_j} \right|_{I=0}, \quad (3.5.13)$$

которым формально удовлетворяет

$$S(I, \bar{\varphi}) = - \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i(k, \bar{\varphi})}}{i(\omega, k)} \tilde{H}_k(I). \quad (3.5.14)$$

$$H = H_0(I) + \lambda \tilde{H}_{k=0}(I) + \lambda^2 H_2(I, \bar{\varphi}), \quad (3.5.15)$$

где

$$H_2(I, \bar{\varphi}) = \lambda^{-2} \left[ H_0 \left( I + \lambda \frac{\partial S}{\partial \bar{\varphi}} \right) - H_0(I) - \lambda \omega_j \frac{\partial S}{\partial \bar{\varphi}_j} \right] + \lambda^{-1} \left[ H_1 \left( I + \lambda \frac{\partial S}{\partial \bar{\varphi}}, \bar{\varphi} \right) - H_1(I, \bar{\varphi}) \right].$$

### Примечания (3.5.16)

1. Если  $|I| < \lambda$ , то функция  $H_2$  остается конечной при  $\lambda \rightarrow 0$ .
2. Ясно, что член с  $k = 0$  не следует включать в (3.5.14). Поэтому нам приходится вычесть  $\tilde{H}_{k=0}(I)$ , что вызывает изменение частоты порядка  $\sim \lambda$ .
3. В случае рационального отношения частот знаменатель в (3.5.14) обращается в нуль. В подобном случае предполагаем  $\det(\partial^2 H_0 / \partial I_i \partial I_j) \neq 0$  и от  $I = 0$  переходим к соседнему значению  $I$ , для которого отношение частот не рационально.
4. Даже если отношения частот иррациональные, то знаменатели  $(\omega \cdot k)$  могут оставаться малыми, поэтому в сходимости формального ряда (3.5.14) необходимо убеждаться особо (“проблема малых знаменателей”).
5. Связь только что полученного результата с изложенной выше теорией состоит в следующем. В (3.4.5,1) было показано, что  $\Omega_{\pm}$  преобразует  $H$  в  $H_0$  и (3.5.2) представляет собой разложение функции  $\Omega(t)$ . Поэтому разумно попытаться подействовать тем же преобразованием на  $H$ , но понимать сходимость в пределе  $t \rightarrow \infty$  в смысле Чезаро:

$$\begin{aligned} \Omega_+ H &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( 1 - \lambda \int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} L_{H_1(t)} \right) H + O(\lambda^2) = \\ &= H_0 + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda \left( \int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} L_{H_0} H_1(t) + H_1 \right) + O(\lambda^2) = \\ &= H_0 + \lambda \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dt \alpha e^{-\alpha t} H_1(t) + O(\lambda^2) = H_0 + \lambda \tilde{H}_{k=0}(I) + O(\lambda^2). \end{aligned}$$

### Лемма (3.5.17)

Пусть функция  $H_1$  аналитична в области  $|\operatorname{Im} \bar{\varphi}_j| < \rho$ ,  $|\bar{I}_j| < r$ . Если существует  $\tau > m+1$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^+$ , такое, что

$$|(\omega \cdot k)|^{-1} \leq c |k|^{\tau-m-1} \quad \forall k \neq 0, \quad |k| := |k_1| + |k_2| + \dots + |k_m|, \quad k_i \in \mathbb{Z},$$

то ряд (3.5.14) сходится к функции аналитической в той же области, и выполняется оценка

$$\|S\|_{\rho-\delta, \tau} \leq \bar{c} \delta^{-\tau+1} \|H_1\|_{\rho, r}, \quad 0 < \delta < \rho < 2,$$

где

$$\|F(I, \varphi)\|_{\rho, r} := \sup_{|I_j| < r} \sup_{|\operatorname{Im} \varphi_j| < \rho} |F(I, \varphi)|, \quad \bar{c} = c 2^{3m} \left( \frac{2}{e} (\tau - m - 1) \right)^{\tau-m-1}.$$

## Примечания (3.5.18)

1. Требование аналитичности не является особенно ограничительным.
2. По теореме Коши из полученной оценки следует

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial S}{\partial \varphi_j} \right\|_{\rho-\delta, \tau} &\leq \bar{c} \delta^{-\tau} \|H_1\|_{\rho, \tau}, \\ \left\| \frac{\partial S}{\partial I_j} \right\|_{\rho-\delta, \tau-\varepsilon} &\leq \bar{c} \delta^{-\tau+1} \varepsilon^{-1} \|H_1\|_{\rho, \tau}, \\ \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial I_i \partial \varphi_j} \right\|_{\rho-\delta, \tau-\varepsilon} &\leq \bar{c} \delta^{-\tau} \varepsilon^{-1} \|H_1\|_{\rho, \tau}. \end{aligned}$$

Поэтому при достаточно малых  $\lambda$  матрица

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_j} = \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial^2 S}{\partial I_i \partial \varphi_j}$$

обратима, как того требует (3.1.6).

3. Условие на частоты  $\omega$  означает, что они должны быть рационально независимы. В случае рациональной зависимости частот возникают резонансные явления, резко усиливающие действие возмущений. Но даже в окрестности резонанса методы теории возмущений становятся неприменимыми.
4. Ясно, что множество

$$\begin{aligned} M &= \left\{ \omega \in \mathbb{R}^m : |(\omega \cdot k)|^{-1} \leq c|k|^{\tau-m-1} \forall k \neq 0 \right\} = \\ &= \bigcap_{(k) \neq 0} \left\{ \omega \in \mathbb{R}^m : |(\omega \cdot k)|^{-1} \leq c|k|^{\tau-m-1} \right\} \end{aligned}$$

замкнуто, поэтому  $SM$  открыто и всюду плотно, а значит содержит рациональные точки. Но множество  $M$  большое в том смысле, что мера пересечения  $SM \cap$  (компактное множество) при  $c, \tau \rightarrow \infty$  стремится к нулю (см. задачу (3.5.22,7)). В качестве противоречащего интуиции примера открытого всюду плотного множества малой массы рассмотрим множество

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \varepsilon 2^{-n}, r_n + \varepsilon 2^{-n}), \quad \varepsilon > 0,$$

где  $r_1, r_2, \dots$  — рациональные числа, мера этого множества

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n+1} \leq 2\varepsilon,$$

и, следовательно, может быть сколь угодно малой, хотя само множество открыто и всюду плотно.

5. С точки зрения геометрии  $SM$  при  $m = 2$  есть объединение внутренностей полос

$$\omega_2 = \frac{k_1}{k_2} \omega_1 \pm \frac{1}{c} |k_2|^{-1} (|k_1| + |k_2|)^{m+1-\tau}$$

на плоскости  $(\omega_1 - \omega_2)$ . При  $\tau > 3$  эти полосы, расположенные вдоль прямых с рациональным угловым коэффициентом  $k_1/k_2$ , которые проходят через точку  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ , тем уже, чем больше  $k_1$  и  $k_2$ , т.е.  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Резонансы, соответствующие отношениям  $k_1/k_2$ , вносят слабые возмущения, подобно далеко разнесенным диссонирующим обертонам в музыке.

6. Любое число  $x \in (0, 1)$  можно сколь угодно точно приблизить рациональными числами  $p/q$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , так как рациональные числа располагаются в  $\mathbb{R}$  всюду плотно. Если аппроксимировать  $x$  десятичными числами, т.е. если  $q_n = 10^n$ , то  $|x - p_n/q_n| \leq 1/q_n$ . Разумеется, такое приближение не оптимально, поскольку при заданной максимальной величине знаменателя наилучшее приближение достигается с помощью непрерывной дроби. Чтобы найти непрерывную дробь, аппроксимирующую  $1/x$ , нужно взять целую часть  $a_1$  от  $1/x$ , затем целую часть  $a_2$  от  $\frac{1}{1/x - a_1}$  и т.д. В результате получаем непрерывную дробь

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + r_n}}}}}, \quad r_n \in (0, 1).$$

Полагая  $r_n = 0$ , получаем рациональное число  $p_n/q_n$ , для которого, как показал Ливиль, справедлива оценка

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{a_{n+1} \cdot q_n^2}.$$

Кроме того, на указанном расстоянии от  $x$  не существует рационального числа  $p'_n/q'_n$  с  $q'_n \leq q_n$ . Разумеется, некоторые числа могут быть приближены рациональными числами с погрешностью, меньшей, чем  $1/q_n^2$ ; если  $x$  рационально, то  $r_n = 0$  при некотором  $n$ . Хуже всего поддаются рациональной аппроксимации иррациональные числа с малыми  $a_i$ , т.е. с  $a_i = 1 \ \forall i$ . Но они не трансцендентны, например,

$$g = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

удовлетворяет квадратному уравнению  $g^2 + g = 1 \iff g = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Число  $g$  — своего рода фетиш для тех, кто любит манипулировать с числами, и возникает довольно часто, например, как золотое сечение в задаче о делении отрезка, при котором большая часть относится ко всему отрезку так же, как меньшая часть к большей, т.е.  $g/1 = (1 - g)/g$ . В рассматриваемом нами случае условие частот нарушается, если существуют  $k_{1,2} \in \mathbb{N}$ , такие, что

$$\left( \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} \right| - \frac{k_1}{k_2} \right) < \frac{\varepsilon}{k_2} (k_1 + k_2)^{3-\tau}.$$

Если  $\tau < 3$ , то обратное неравенство не может выполняться  $\forall k_{1,2} \in \mathbb{N}$ , так как даже для десятичных чисел приходим к неравенству  $|\alpha - k_1/k_2| < c/k_2$ . Как следует из приведенных выше соображений, непрерывные дроби позволяют исключить даже  $\tau \leq 4$ . Задача (3.5.33,7) показывает, что это наиболее точный результат, который может быть получен. Согласно ему, мера всех  $\alpha \in (0, 1)$ , нарушающих неравенство  $|\alpha - k_1/k_2| \leq \varepsilon/k_2^{\tau-2}$ , для  $\tau > 4$  стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Доказательство леммы (3.5.17)**

Так как функция Гамильтона  $H$  периодична по  $\varphi$ , то в зависимости от знака  $k_j$  путь интегрирования по  $\varphi_j$  в (3.5.11) можно сдвинуть так, чтобы  $\text{Im } \varphi_j = \pm \rho$  и знак в правой части совпадал со знаком  $k_j$ . Тогда

$$\|\tilde{H}_k(I)\|_{\tau} = \sup_{|I_j| < \tau} \left| \int \frac{d\varphi_1 \dots d\varphi_m}{(2\pi)^m} e^{-i(k, \varphi)} H_1(I, \varphi) \right| \leq e^{-|k|\rho} \|H_1\|_{\rho, \tau}.$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} \|S\|_{\rho-\delta, \tau} &\leq \sup_{|\text{Im } \varphi_j| < \rho-\delta} \left| \sum_{k \neq 0} e^{i(k, \varphi) - |k|\rho} c |k|^{\tau-m-1} \right| \|H_1\|_{\rho, \tau} \leq \\ &\leq \sum_{k \neq 0} e^{-|k|\delta} c |k|^{\tau-m-1} \|H_1\|_{\rho, \tau}. \end{aligned}$$

Чтобы ограничить сверху сумму  $\sum_k$ , воспользуемся общим неравенством

$$|k|^{\sigma} \leq \left( \frac{2\sigma}{e\delta} \right)^{\sigma} e^{|k|\delta/2} \quad \forall \sigma > 0, \delta > 0,$$

и в результате элементарных вычислений имеем

$$\sum_{k_1} e^{-|k_1|\delta/2} = \frac{2}{1 - e^{-\delta/2}} - 1 < \frac{8}{\delta} \quad \forall \delta < 2.$$

Вместе с неравенством из (3.5.17) это дает следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|S\|_{\rho-\delta, \tau} &\leq c \|H_1\|_{\rho, \tau} \left( \frac{2(\tau - m - 1)}{e\delta} \right)^{\tau-m-1} \sum_{k \neq 0} e^{-|k|\delta/2} < \\ &< c \|H_1\|_{\rho, \tau} 8^m \delta^{-\tau+1} \left[ \frac{2}{e} (\tau - m - 1) \right]^{\tau-m-1}. \end{aligned}$$

Полученная равномерная оценка суммы свидетельствует и о ее аналитичности.  $\square$

**Следствие (3.5.19)**

Если выполнены условия леммы (3.5.17), то действие возмущения  $|I_j| < \lambda$  на траектории с точностью до величины порядка  $O(\lambda^2)$  сводится только к изменению частот

$$\omega_j \rightarrow \omega_j + \lambda \left. \frac{\partial \tilde{H}_{k=0}}{\partial I_j} \right|_{I=0}.$$

Следовательно,  $\dot{I}$  есть величина порядка  $O(\lambda^2)$  и условие  $|I_j| < \lambda$  остается в силе для всех  $|t| < c\lambda^{-1}$ .

**Примечания (3.5.20)**

1. Утверждение (3.5.19) согласуется с интуицией. При  $\lambda = 0$  величины  $I$  постоянны, а  $\varphi$  изменяются с конечной угловой скоростью. Это позволяет высказать предположение о том, что при малых  $\lambda$  доминирует среднее от  $H$  по  $\varphi$ .

2. Следствие (3.5.19) уточняет оценку (3.5.4), но при более сильных предположениях, поскольку при выводе оценки мы установили лишь, что  $\forall |t| \leq c\lambda^{-1}$  разность между потоками  $\Phi_t^0$  и  $\Phi_t$  есть величина порядка  $O(1)$ . Теперь же знаем, что в том же диапазоне времен изменяются только частоты с точностью  $O(\lambda)$ .
3. Независимость частот необходима в утверждении (3.5.19), чтобы исключить тривиальные контрпримеры. При  $m = 1$  независимость частот означает, что  $\omega \neq 0$ . Если выбрать

$$H_0 = 0, \quad H_1 = \cos \varphi \Rightarrow \tilde{H}_{k=0}(I) = 0,$$

то по теории возмущений  $I$  и  $\varphi$  постоянны с точностью до  $O(\lambda^2)$ . С другой стороны, такая функция Гамильтона  $H$  порождает поток  $\varphi \rightarrow \varphi, I \rightarrow I + \lambda t \sin \varphi$ , так что при  $t \sim 1/\lambda$  изменение составляет величину порядка  $O(1)$ , а не  $O(\lambda)$ .

4. Первоначальные переменные действия  $\bar{I}_j$  зависят от времени, изменяясь только на величину порядка  $O(\lambda)$ , а  $\partial S/\partial \bar{\varphi}$  — периодическая функция с нулевым средним значением. При усреднении по времени эти переменные изменяются лишь на величину порядка  $O(\lambda^2)$  (так называемые “вековые возмущения” отсутствуют).
5. В нашей Солнечной системе характерное время равно году, возмущения из-за взаимодействия планет составляют примерно 1/1000 от возмущений, вносимых Солнцем. Следствие (3.5.19) позволяет надеяться, что за тысячелетие траектории планет изменяются лишь на десятую процента. Доказательство реальной устойчивости Солнечной системы на протяжении  $10^9$  лет превосходит искусство современных аналитиков и может пока основываться лишь на результатах численных расчетов на компьютерах, специально построенных для этой цели [21].
6. Из (3.5.19) следует так называемая адиабатическая теорема классической механики, согласно которой при медленном включении возмущения переменные действия остаются постоянными. Более точно эта теорема гласит следующее.

*Пусть семейство функций Гамильтона  $H(q, p; \lambda)$  имеет переменные действия  $I(q, p; \lambda)$  и выполняется условие на частоты из (3.5.17). Предположим, что  $\lambda$  зависит от времени  $\lambda = \varepsilon t$ . Если искать решения уравнений в виде*

$$\dot{q}(t) = H_{,p}(q(t), p(t); \varepsilon t), \quad \dot{p}(t) = -H_{,q}(q(t), p(t); \varepsilon t),$$

*тогда существуют  $c_i > 0$  и  $\varepsilon_0 > 0$ , такие, что*

$$|I(q(t), p(t); \varepsilon t) - I(q(0), p(0), 0)| < \varepsilon c_1 \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0, \quad |t| \leq \frac{c_2}{\varepsilon}.$$

Доказательство см. в задаче (3.5.22,8).

### Примеры (3.5.21)

1.  $H_0 = \omega_j \bar{I}_j$  и  $H_1(\bar{\varphi})$  не зависит от  $\bar{I}$ . В этом случае  $H_2$  обращается в нуль, и теория возмущений дает в действительности точное решение:

$$\bar{\varphi}_j = \varphi_j, \quad \bar{I}_j = I_j - \lambda \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i(k, \varphi)} k_j}{(\omega, k)} \tilde{H}_k,$$

которое, при  $\dot{\varphi}_j = \omega_j$  и  $\dot{I}_j = 0$ , удовлетворяет уравнениям

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j, \quad \dot{I}_j = -\lambda \sum_k i k_j e^{i(k, \varphi)} \tilde{H}_k.$$



## 2. Осциллятор под действием вынуждающей силы:

$H = (p^2 + q^2)/2 + \lambda q$ . Прежде всего необходимо преобразовать переменные действие-угол так, чтобы мы могли удобным образом выбрать точку  $\bar{I} = 0$ :

$$p = \sqrt{2(\bar{I} + \rho)} \cos \bar{\varphi}, \quad q = \sqrt{2(\bar{I} + \rho)} \sin \bar{\varphi}, \quad \rho \in \mathbb{R}^+,$$

$$\Rightarrow H = \bar{I} + \rho + \lambda \sqrt{2(\bar{I} + \rho)} \sin \bar{\varphi}, \quad \dot{H}_{k=0} = 0.$$

Таким образом, частота остается равной 1, и мы получаем в результате вычислений

$$S = \sqrt{2(I + \rho)} \cos \bar{\varphi}, \quad \bar{I} = I - \lambda \sqrt{2(I + \rho)} \sin \bar{\varphi}, \quad \varphi = \bar{\varphi} + \lambda \cos \bar{\varphi} / \sqrt{2(I + \rho)}.$$

Заметим, что преобразование  $(q, p) \rightarrow (q - \lambda, p)$  переводит  $H$  в  $(p^2 + q^2)/2 - \lambda^2/2$ . Поэтому если положить

$$\sqrt{2(\bar{I} + \rho)} (\sin \bar{\varphi}, \cos \bar{\varphi}) = \left( \sqrt{2(I + \rho)} \sin \varphi - \lambda, \sqrt{2(I + \rho)} \cos \varphi \right)$$

или

$$\bar{I} = I - \lambda \sqrt{2(I + \rho)} \sin \varphi + \frac{\lambda^2}{2}, \quad \cos \bar{\varphi} = \left[ 1 - \lambda \sqrt{\frac{2}{I + \rho}} \sin \varphi + \frac{\lambda^2}{2(I + \rho)} \right]^{-1/2} \cos \varphi,$$

то  $H = I + \rho - \lambda^2/2$ . Теория возмущений приводит к этому же преобразованию с точностью до  $O(\lambda^2)$ . Так как  $[\ ]^{-1/2}$  обладает особенностями при комплексных  $\lambda$ , то разложение по  $\lambda$  имеет место лишь при конечных радиусах сходимости, хотя переменные действие-угол существуют  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

## 3. Осциллятор с изменяющейся частотой:

$H = (p^2 + q^2)/2 + \lambda q^2 = \bar{I} + 2\lambda \bar{I} \sin^2 \bar{\varphi}$ . Здесь  $\dot{H}_{k=0}(\bar{I}) = \bar{I}$ , следовательно, частота изменяется и переходит в  $1 + \lambda$ , что является первым приближением к  $\sqrt{1 + 2\lambda}$ . Кроме того,

$$S = \frac{I}{2} \sin 2\bar{\varphi} \Rightarrow \bar{I} = I(1 + \lambda \cos 2\bar{\varphi}), \quad \varphi = \bar{\varphi} + \frac{\lambda}{2} \sin 2\bar{\varphi}.$$

И снова получаем первые члены разложения по  $\lambda$  преобразования, переводящего  $H$  в  $I\sqrt{1 + 2\lambda}$  (см. задачу (3.5.22,4)). Теория возмущения здесь сходится при  $|\lambda| < 1/2$ , а при  $\lambda < -1/2$  периодическое поведение во времени переходит в экспоненциальное. При  $\lambda = -1/2$  эволюция во времени не имеет особенностей (см. задачу (3.5.22,2)), но в этой точке переменные действие-угол не существуют.

### Задачи (3.5.22)

1. Для линейного дифференциального уравнения матрица  $e^{tLH}$  представима в виде матрицы  $e^{tA}$ . Выведите формулу для  $e^{t(A_0 + \lambda A_1)}$ , аналогичную формуле (3.5.2).
2. Примените (3.5.7) к  $H_0 = p^2/2$ ,  $H_1 = -q^2/2$ .
3. В качестве предостерегающего примера вычислите  $H_2$  из (3.5.21,2).
4. Найдите переменные действие-угол  $(I, \varphi)$  так, чтобы функция Гамильтона  $H$  из (3.5.21,3) была равна  $I\sqrt{1 + 2\lambda}$ . Сравните с теорией возмущений.
5. При каких частотах  $\omega$  теория возмущения (3.5.19) применима к осциллятору, находящемуся под действием периодической вынуждающей силы (см. (3.3.17,3)), с  $H = (p^2 + q^2)/2 + \lambda q \cos \omega t$ ?
6. При каких значениях  $\lambda$  теория возмущения применима к маятнику с  $H = (\bar{I} + \omega)^2/2 + \lambda \cos \bar{\varphi}$ ?

7. Докажите, что при  $m = 2$  мера дополинения  $CM$  из (3.5.18,4) при  $\tau > 4$  стремится к нулю, если  $c$  возрастает.
8. Доказательство адиабатической теоремы (3.5.20,6).  
Шаг 1. Найдите в расширенном фазовом пространстве функцию Гамильтона, которая приводит к правильным уравнениям движения для  $\varphi, I$ , если  $\lambda = \varepsilon t$ .  
Шаг 2. Преобразуйте возмущенную функцию Гамильтона по аналогии с (3.5.14).

## Решения (3.5.23)

$$1. \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{-tA_0} e^{t(A_0 + \lambda A_1)} &= \lambda e^{-tA_0} A_1 e^{t(A_0 + \lambda A_1)} \longrightarrow \\ \longrightarrow e^{t(A_0 + \lambda A_1)} &= e^{tA_0} + \lambda \int_0^t dt_1 e^{(t-t_1)A_0} A_1 e^{t_1(A_0 + \lambda A_1)}. \end{aligned}$$

$$2. \quad q(t) = q + tp, \quad p(t) = p. \quad H_1(t_n) = -(q + t_n p)^2 / 2.$$

$$\begin{aligned} \{H_1(t_n), q(t)\} &= (t_n - t)q(t_n) \implies \{H_1(t_1), \{H_1(t_2), \dots \{H_1(t_n), q(t)\} \dots\}\} = \\ &= (t_1 - t_2)(t_2 - t_3) \dots (t_n - t)q(t_1). \end{aligned}$$

Тогда  $\int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^t dt_n$  вместе с  $\int_0^1 dt t^p (1-t)^q = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$  можно представить как ряд  $q \frac{t^{2n}}{2n!} + p \frac{t^{n+1}}{(2n+1)!}$ , которые являются коэффициентами при разложении в ряд Тейлора функции  $q \operatorname{ch} \lambda^{1/2} t + p \lambda^{-1/2} \lambda^{1/2} t$ .

$$3. \quad H_2 = \lambda^{-1} \left[ \sqrt{2(I + \rho - \lambda \sqrt{2(I + \rho)} \sin \bar{\varphi}) - \sqrt{2(I + \rho)}} \right] \sin \bar{\varphi}.$$

$$4. \quad \begin{aligned} \sqrt{2\bar{I}} \sin \bar{\varphi} &= \sqrt{\frac{2I}{\sqrt{1+2\lambda}}} \sin \varphi, \quad \sqrt{2\bar{I}} \cos \bar{\varphi} = \sqrt{2I \sqrt{1+2\lambda}} \cos \varphi \longrightarrow \\ \longrightarrow \bar{I} &= I \sqrt{1+2\lambda} \left\{ \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{(1+2\lambda)} \right\}, \quad \cos \varphi = \sqrt{\frac{\bar{I}}{I \sqrt{1+2\lambda}}} \cos \bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Разложение в ряд по  $\lambda$  дает (3.5.21,3).

5. Введите в качестве переменных  $(q, p)$  переменные действие-угол и произведите подстановку  $(t, E) \rightarrow (t/\omega, \omega E)$ . Тогда  $\mathcal{H} = I - \omega E + \lambda \sqrt{2\bar{I}} \sin \varphi \cos t$ . Иррациональность отношений частот заведомо гарантируется только при  $\omega \notin \mathbb{Q}$ .
6. По определению (3.3.14), переменная действие для  $H$  равна

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi \sqrt{E + \lambda \cos \varphi},$$

которая является аналитической функцией по  $\lambda$ , при  $|\lambda| < E$ .

7. В общем случае можно предположить, что  $0 \leq \omega_1/\omega_2 =: \alpha \leq 1$ . Рассмотрим меру множества

$$B_\varepsilon = \left\{ \alpha \in [0, 1] : \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} : |\alpha k_1 - k_2| < \varepsilon |k|^{-n} \right\},$$

где  $\varepsilon = \frac{1}{c} \omega_2 < 1$  и  $n = \tau - 3 > 1$ . Оно содержится в множестве тех  $B_\varepsilon$ , которые удовлетворяют неравенству  $\alpha |\alpha - k_2/k_1| < \varepsilon |k_1|^{-n-1}$ . Последнее условие требует, чтобы числа  $k_1$  и  $k_2$  имели одинаковые знаки  $|k_2| < |k_1| + 1$ . Следовательно,

$$\mu(B_\varepsilon) \leq 2 \sum_{k_1 > 0, k_1 + 1 > k_2 > 0} \varepsilon k_1^{-n-1} = 2\varepsilon \sum_{k_1 > 0} \frac{k_1 + 1}{k_1^{n+1}} = \varepsilon \bar{c},$$

где  $\bar{c} < \infty$ .

8. Пусть  $S_1(\lambda)$  — производящая функция преобразования

$$(q, p) \rightarrow (\bar{\varphi}, \bar{I}) : pdq = \bar{I}d\bar{\varphi} + dS_1.$$

Но в расширенном фазовом пространстве  $dS_1$  при  $\lambda = \epsilon t$  имеет дополнительный член  $\epsilon S_{1,\lambda} dt$ . Следовательно, каноническая 2-форма имеет вид

$$dq \wedge dp - dt \wedge dE = d\bar{\varphi} \wedge d\bar{I} - dt \wedge (d(E - \epsilon S_{1,\lambda})),$$

$\bar{\varphi}$  и  $\bar{I}$ , при  $\bar{t} = t$  и  $\bar{E} = E + \epsilon S_{1,\lambda}$ , дополняют канонические координаты. Тогда  $\mathcal{H} = H - E = H + \epsilon S_{1,\lambda} - \bar{E}$ , хотя глобально определена не  $S_1$ , а  $S_{1,\lambda}$ . Теперь имеем возмущение  $\epsilon S_{1,\lambda}$ , где

$$S_{1,\lambda} = \sum_k \bar{H}_k(\bar{I}, \epsilon t) e^{i(k, \bar{\varphi})},$$

поэтому

$$\bar{S} = - \sum_{k \neq 0} \frac{\bar{H}_k(I, \epsilon t) e^{i(k, \bar{\varphi})}}{i(\omega \cdot k)}$$

и порождает преобразование

$$\bar{I} = I + \epsilon \frac{\partial S}{\partial \bar{\varphi}}, \quad \bar{\varphi} = \varphi - \epsilon \frac{\partial S}{\partial I}, \quad \bar{E} = E + \epsilon \frac{\partial S}{\partial \bar{t}}, \quad \bar{t} = t.$$

Величины  $\bar{E}$  и  $E$  отличаются только на величину порядка  $O(\epsilon^2)$ , так как  $\partial S / \partial \bar{t} = \epsilon \partial S / \partial \lambda$ . Следовательно, с точностью до  $O(\epsilon^2)$  эффективная функция Гамильтона принимает вид  $H(I) + \epsilon \bar{H}_{k=0}(I)$ , а  $\bar{I}$  и  $I$  отличаются только на величину, равную произведению параметра  $\epsilon$  и функции  $p(t) = \partial S / \partial \bar{\varphi}$ . Поэтому  $|\bar{I} - I| < \epsilon |p(t)| + c\epsilon^2 t$ , а  $p$  зависит от  $t$  через  $\bar{H}_k$  и  $\bar{\varphi}$ . Последняя зависимость периодическая, тогда как первая ограничена независимо от  $\epsilon$  при  $0 < t < 1/\epsilon$  величиной  $\sup_{0 < \lambda < 1} \bar{H}_k(I, \lambda)$ . Следовательно, оба слагаемых удовлетворяют требованиям, сформулированным в (3.5.20,6).

### 3.6. Итерация разложения в ряд теории возмущений

*При возмущении интегрируемой системы одни инвариантные торы полностью разрушаются, тогда как другие лишь деформируются. При достаточно малых возмущениях деформированные торы заполняют большую часть фазового пространства.*

В параграфе 3.5 возмущенная интегрируемая система преобразовалась в другую интегрируемую систему с точностью до  $O(\lambda^2)$ . Возникает вопрос, можно ли с помощью итерации такой процедуры полностью исключить возмущение. Долгое время господствовало мнение, что сколь угодно малое возмущение (“пылинка”) может разрушить все постоянные движения, кроме  $H$ , и траектории, при этом, всюду плотно заполнят энергетическую поверхность (эргодичность). Однако благодаря работам Колмогорова, Арнольда и Мозера теперь мы знаем, что это не так. Даже если нет других постоянных движения, кроме  $H$ , при малых  $\lambda$  существует достаточно много инвариантных  $m$ -мерных многообразий, и система в большинстве случаев ведет себя как интегрируемая.

В этом параграфе рассмотрим случай

$$H_0(\bar{I}, \bar{\varphi}) = \bar{I}_j \omega_j + \frac{1}{2} C_{ij}(\bar{\varphi}) \bar{I}_i \bar{I}_j, \quad H_1(\bar{I}, \bar{\varphi}) = A(\bar{\varphi}) + B_j(\bar{\varphi}) \bar{I}_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3.6.1)$$

■ попытаемся с помощью последовательных преобразований свести  $H_1$  к нулю. Если останется только  $H_0$ , то тор  $I_j = 0$  инвариантен по времени и траектория  $\varphi_j \rightarrow \varphi_j + \omega_j t$  наматывается на него.

## Примечания (3.6.2)

1. Можем допустить, чтобы коэффициенты  $C$  зависели от  $\bar{\varphi}$ , поскольку уравнениям движения, с  $H = H_0(I^{(\infty)}, \varphi^{(\infty)})$ ,

$$\dot{\varphi}_j^{(\infty)} = \omega_j + C_{j\ell}^{(\infty)} I_\ell^{(\infty)}, \quad \dot{I}_j^{(\infty)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_{i\ell}^{(\infty)}}{\partial \varphi_j} I_i^{(\infty)} I_\ell^{(\infty)},$$

удовлетворяют  $I_j^{(\infty)}(t) = 0$ ,  $\varphi_j^{(\infty)}(t) = \varphi_j^{(\infty)}(0) + \omega_j t$ . В этом случае  $H_0$  перестает быть интегрируемой, но имеет инвариантный тор.

2. Приводимый ниже анализ остается в силе и в том случае, когда  $H_0$  содержит член более высокого порядка по  $I$  или когда  $H_1$  имеет более сложную структуру.
3. В первом приближении частоты изменяются на  $\tilde{B}_j(k=0)$ , что может нарушить условие рациональной независимости из (3.5.17). Если  $\det C \neq 0$ , то с помощью сдвига по  $I$  для  $\partial H_0^{(1)}/\partial I_j|_{I=0}$  можно получить старые частоты  $\omega_j$ , что позволяет и далее пользоваться леммой (3.5.17).
4. Итерация процедуры, изложенной в параграфе 3.5, более эффективна, чем разложение в степенной ряд. При этом, если  $A$  и  $B$  — величины порядка  $O(\lambda)$ , то, переходя последовательно к  $\lambda^2, \lambda^4, \lambda^8, \dots$ , получаем после  $n$ -й итерации  $H_1$  только порядка  $O(\lambda^{2^n})$ . Эту идею использовал еще Ньютон в своем методе последовательных приближений к нулю функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , образующем последовательность  $\{x_n\}$ , элементы которой удовлетворяют рекуррентному соотношению  $x_{n+1} - x_n = -f(x_n)/f'(x_n) =: \varepsilon_n$ . Если  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , то

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + \varepsilon_{n-1} f'(x_{n-1}) + O(\varepsilon_{n-1}^2) = O(\varepsilon_{n-1}^2)$$

и при условии, что  $|f'(x_n)| > c \quad \forall n$ , получаем, кроме того,  $\varepsilon_n = O(\varepsilon_{n-1}^2)$ . При благоприятном выборе  $x_1$  погрешность  $\varepsilon_n$  сходится к нулю гораздо быстрее, чем в случае примитивного разложения в степенной ряд.

Производящую функцию  $S$  из (3.5.12) следует выбрать так, чтобы она порождала точечное преобразование в комбинации с зависящим от  $\varphi$  сдвигом по  $I$ . При этом вид  $H_0 + H_1$  остается инвариантным. Условимся считать, что новые  $A$  и  $B$  квадратичны по старым, которые будем рассматривать как малые величины первого порядка.

## Первый шаг (3.6.3)

Если  $X$  и  $Y$  производящей функции ( $\xi \in \mathbb{R}^m$ )

$$S(I, \bar{\varphi}) := \xi_j \bar{\varphi}_j + X(\bar{\varphi}) + I_j Y_j(\bar{\varphi}), \quad \varphi_j = \bar{\varphi}_j + Y_j(\bar{\varphi}), \quad \bar{I}_j = I_j + \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}_j} + I_\ell \frac{\partial Y_\ell}{\partial \bar{\varphi}_j} + \xi_j$$

удовлетворяют уравнениям

$$A(\bar{\varphi}) + \omega_j \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}_j} = \tilde{A}(k=0), \quad B_j(\bar{\varphi}) + \omega_i \frac{\partial Y_j}{\partial \bar{\varphi}_i} + C_{ji} \left( \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}_i} + \xi_i \right) = 0,$$

тогда

$$H = H_0 + H_1 = \omega_j I_j + \frac{1}{2} C_{ij}^{(1)} I_i I_j + A^{(1)} + B_j^{(1)} I_j + \bar{A}(k=0) + \omega_j \xi_j,$$

$$A^{(1)} = \frac{1}{2} C_{ij} \left( \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}_i} + \xi_i \right) \left( \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}_j} + \xi_j \right) + B_j \left( \xi_j + \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}_j} \right),$$

$$B_\ell^{(1)} = C_{ij} \left( \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}_i} + \xi_i \right) \frac{\partial Y_\ell}{\partial \bar{\varphi}_j} + B_j \frac{\partial Y_\ell}{\partial \bar{\varphi}_j},$$

$$C_{\ell m}^{(1)} = C_{ij} \left( \delta_{i\ell} + \frac{\partial Y_\ell}{\partial \bar{\varphi}_i} \right) \left( \delta_{jm} + \frac{\partial Y_m}{\partial \bar{\varphi}_j} \right).$$

### Примечания (3.6.4)

- Здесь используются обозначения (3.5.11) для коэффициентов Фурье. Выражение для  $H$  может быть получено с помощью подстановки  $(\bar{A}(0))$ , а  $\omega_j \xi_j$  не зависят от  $\varphi$  и  $I$  и поэтому не существенны).
- Необходимо убедиться, что отображение  $\bar{\varphi} \rightarrow \varphi$  биективно. Это позволяет нам выразить коэффициенты функции Гамильтона  $H$  через  $\varphi$ . Так как  $\varphi$  не зависит от  $I$ , то структура (3.6.1) функции Гамильтона остается неизменной.
- Хотя производящая функция  $S$  не периодична по  $\varphi$ , однако дифференциал  $dS$  периодичен и поэтому определен глобально.

### Оценка производящей функции $S$ (3.6.5)

Для решения уравнений для  $X$ ,  $\xi$  и  $Y$  предположим, как и в (3.5.17), что  $A$ ,  $B$ ,  $C$  аналитичны при  $|\operatorname{Im} \bar{\varphi}_j| < \rho$ . Для таких функций  $f$  всегда имеем удобную оценку  $\|f, g\|_{\rho-h} \leq h^{-1} \|f\|_\rho$ . Первому из уравнений (3.6.3) удовлетворим с помощью следующего выражения для  $X$

$$X(\bar{\varphi}) = - \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i(k, \bar{\varphi})} \bar{A}(k)}{i(\omega, k)} \quad (3.6.6)$$

■ зная  $X$ , вычислим величину

$$E_i(\bar{\varphi}) := C_{ij}(\bar{\varphi}) \frac{\partial X(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}_j}, \quad (3.6.7)$$

■ вводящую во второе уравнение. Части этого уравнения, соответствующие  $k = 0$  и  $k \neq 0$ , имеют вид

$$\bar{C}_{ji}(0) \xi_i = -\bar{B}_j(0) - \bar{E}_j(0), \quad Y_j(\bar{\varphi}) = - \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i(k, \bar{\varphi})}}{i(\omega, k)} \left[ \bar{B}_j(k) + \bar{C}_{ji}(k) \xi_i + \bar{E}_j(k) \right]. \quad (3.6.8)$$

■ Из леммы (3.5.17) следуют границы для величин  $X$  и  $Y$ . Поскольку теперь имеем дело с  $X$  и  $Y$ , зависящими от  $I$ , то индекс  $r$  нормы  $\|\cdot\|_{\rho, r}$  можно опустить (предполагается, что всегда  $r \geq 1$ ):

$$\|X\|_{\rho-h} \leq ch^{-\tau+1} \|A\|_\rho, \quad \left\| \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}_j} \right\|_{\rho-h} \leq ch^{-\tau} \|A\|_\rho, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.6.9)$$

Результирующим неравенством

$$\|E_j\|_{\rho-h} \leq cm h^{-\tau} \|C\|_{\rho} \|A\|_{\rho}, \quad \|C\|_{\rho} = \max_{i,j} \|C\|_{\rho}, \quad (3.6.10)$$

воспользуемся, чтобы получить ограничения на остальные величины

$$|\xi_i| \leq m \|\tilde{C}(0)^{-1}\| \{ \|B\|_{\rho} + cm h^{-\tau} \|C\|_{\rho} \|A\|_{\rho} \}, \quad (3.6.11)$$

$$\left\| \frac{\partial Y_j}{\partial \bar{\varphi}_i} \right\|_{\rho-2h} \leq \left\{ \|A\|_{\rho} \|C\|_{\rho} m c^2 h^{-2\tau} + c \|B\|_{\rho} h^{-\tau} \right\} \{ 1 + m \|C\|_{\rho} \|\tilde{C}(0)^{-1}\| \}.$$

### Примечания (3.6.12)

1. Пусть для вектора  $(v_i)$  выбрана норма  $\|v\| = \max_i |v_i|$ , а для матрицы  $(M_{ij})$  — норма  $\|M\| = \max_{i,j} |M_{ij}|$ . Тогда для произведения матрицы на вектор имеем неравенство  $\|Mv\| \leq m \|M\| \cdot \|v\|$ , а для произведения двух матриц — соотношение  $\|M_1 \cdot M_2\| \leq m \|M_1\| \cdot \|M_2\|$ .
2. Границы для  $\partial Y_i / \partial \bar{\varphi}_j$  показывают, что при достаточно малых  $A$  и  $B$  матрица  $\partial \varphi_i / \partial \bar{\varphi}_j$  обратима и  $\bar{\varphi} \rightarrow \varphi$  — диффеоморфизм.

Пользуясь границами величин, определим, с какой скоростью  $H_2 := A^{(1)} + B^{(1)} I_j$  сходится к  $H_1$ . (Напомним, что  $\|C\|_{\rho} \geq \|\tilde{C}(0)\| \geq (m \|\tilde{C}(0)^{-1}\|)^{-1}$ .)

### Оценка функции $H_2$ (3.6.13)

Пусть

$$\|H_1\|_{\rho} = \max\{\|A\|_{\rho}, \|B\|_{\rho}\}, \quad \|H_2\|_{\rho-3h} = \sup_{|\operatorname{Im} \varphi_j| < \rho-3h} \max\{\|A^{(1)}\|, \|B^{(1)}\|\}$$

и

$$\Gamma = \max\{1, m \|C\|_{\rho}, m \|\tilde{C}(0)^{-1}\|\}.$$

Тогда, если

$$\|H_1\|_{\rho} c^2 \Gamma^3 h^{-2\tau} \leq \frac{1}{4} c h^{-\tau} \geq 1,$$

то

$$\|H_2\|_{\rho-3h} \leq \|H_1\|_{\rho}^2 16 c^3 h^{-3\tau} \Gamma^6.$$

### Доказательство

Подставляя (3.6.9) и (3.6.11) в (3.6.3), следует иметь в виду, что в (3.6.11) супремум  $\sup_{|\operatorname{Im} \bar{\varphi}_j| < \rho-2h}$  надлежит выразить через  $\varphi$ . Если условие на  $\|H_1\|_{\rho}$  выполнено, то

$$|\bar{\varphi} - \varphi(\bar{\varphi})| < h \quad \forall |\operatorname{Im} \bar{\varphi}_j| < \rho - 2h,$$

и полоса  $|\operatorname{Im} \varphi_j| < \rho - 3h$  содержится в образе полосы  $|\operatorname{Im} \bar{\varphi}_j| < \rho - 2h$ . Отсюда и следует требуемая оценка.  $\square$

Простая рекуррентная форма неравенства (3.6.13) наводит на мысль об использовании  $n$ -кратной итерации того же метода. Величину  $h_n$  на  $n$ -м шаге следует выбирать таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n < \rho/3$ . Множитель  $h_n^{-3\tau}$  в (3.6.13) может управляться только тем, что норма  $\|H_{n-1}\|$  входит в квадрате и достаточно мала, если мала норма  $\|H_1\|$ . Кроме того,  $C$  изменяется при преобразовании, и поэтому необходимо проверять и

контролировать, чтобы величина  $\Gamma$  оставалась ограниченной. Но во всяком случае, повторив приведенный выше анализ, приходим к следующему неравенству.

**Оценка величины  $H_n$  (3.6.14)**

Пусть

$$h_n = h 3^{-n+1}, \quad \rho_n = \rho - 3 \sum_{j=1}^{n-1} 3^{-j+1} h > \rho - \frac{9h}{2},$$

тогда, в обозначениях оценки (3.6.13),

$$\Gamma_{n-1} = \max\{1, m \|C^{(n-1)}\|_{\rho_{n-1}}, m \|\tilde{C}^{(n-1)}(0)^{-1}\|\}$$

справедливо следующее неравенство:

$$\|H_n\|_{\rho_n} \leq \|H_{n-1}\|_{\rho_{n-1}}^2 16c^3 h^{-3\tau} 3^{3\tau n} \Gamma_{n-1}^6 3^{-6\tau}.$$

Оно позволяет нам переходить к пределу при  $n \rightarrow \infty$ .

**Сходимость итераций (3.6.15)**

Рекуррентному соотношению  $x_n = x_{n-1}^2 \gamma \delta^n$  удовлетворяет

$$x_n = \frac{(\gamma \delta^3 x_1)^{2^{n-1}}}{\gamma \delta^{n+2}}.$$

Но тогда

$$\|H_n\|_{\rho_n} \leq (16c^3 h^{-3\tau} 3^{3\tau} \Gamma^6 \|H_1\|_{\rho})^{2^{n-1}} (16c^3 h^{-3\tau} \Gamma^6 3^{3\tau n})^{-1},$$

если  $\Gamma > \Gamma_n \quad \forall n$  и  $\|H_1\|_{\rho} < h^{3\tau}/16c^3 3^{\tau} \Gamma^6$ , то  $\|H_n\|_{\rho_n} \geq \|H_n\|_{\rho-9h/2}$ , сходятся к нулю.

**Примечания (3.6.16)**

1. Обобщение условия оценки (3.6.13), т.е. утверждение о том, что на  $n$ -м шаге  $\varphi$  изменяется меньше, чем на  $h_n$ , теперь гласит:  $\|H_n\|_{\rho_n} c \Gamma^3 h^{-\tau} 3^{\tau(n-1)} \leq \frac{1}{4}$  и заведомо выполняется в случае сходимости.
2. В полосе  $|\text{Im } \varphi_j| < \rho - 9h/2$  процедура сходится равномерно, поэтому предельные функции в указанной области аналитичны.

Убедимся теперь, что величину  $\Gamma$  можно всегда сделать ограниченной. Это позволяет контролировать малые знаменатели.

**Оценка величины  $C^{(n)}$  (3.6.17)**

Из неравенства (3.6.11) следует

$$\|C^{(n)}\|_{\rho_n} \leq \|C^{(n-1)}\|_{\rho_{n-1}} (1 + 4 \|H_n\|_{\rho_n} 4c^2 h^{-2\tau} 3^{2\tau(n-1)} \Gamma^3)^2.$$

Таким образом, дело сводится к доказательству сходимости выражения

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x_n)^2 = e^{2 \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+x_n)} \leq e^{2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n},$$

где

$$x_n \leq \frac{(16c^3 3^{3\tau} h^{-3\tau} \Gamma^6 \|H_1\|_{\rho})^{2^{n-1}}}{4\Gamma^3 h^{-\tau} 3^{\tau(n+2)}}.$$

Но правая часть очевидным образом сходится; например, при

$$16c^3 h^{-3\tau} 3^{3\tau} \Gamma^6 \|H_1\|_\rho < 3/4,$$

нетрудно доказать, что

$$\|C^{(n)}\|_{\rho_n} < 2\|C\|_\rho \quad \forall n.$$

**Оценка величины  $\tilde{C}^{(n)}(0)^{-1}$**  (3.6.18)

Начнем с

$$\tilde{C}_{ij}^{(1)}(0) = (2\pi)^{-m} \int d\varphi_1 \dots d\varphi_m (\delta_{il} + Y_{i,l}) C_{lk} (\delta_{kj} + Y_{j,k}).$$

Усреднение здесь проводится по  $\varphi$ , но  $Y$  и  $C$  заданы как функции от  $\bar{\varphi}$ . Если перейти к переменным  $\bar{\varphi}$  и воспользоваться матричными обозначениями ( $Y' = \partial Y_i / \partial \bar{\varphi}_j$  и т.д.), то

$$\begin{aligned} \|\tilde{C}(0) - \tilde{C}^{(1)}(0)\| &= \left\| (2\pi)^{-m} \int d\bar{\varphi}_1 \dots d\bar{\varphi}_m \left\{ C - (1 + Y')C(1 + Y'^t) \det(1 + Y') \right\} \right\| = \\ &= \left\| (2\pi)^{-m} \int d\bar{\varphi}_1 \dots d\bar{\varphi}_m \left\{ C(1 - \det(1 + Y')) - (CY'^t + Y'C + Y'CY'^t) \det(1 + Y') \right\} \right\| \leq \\ &\leq \|C\|_\rho \frac{3m\|Y'\|_{\bar{\rho}} + m^2\|Y'\|_{\bar{\rho}}^2}{1 - m\|Y'\|_{\bar{\rho}}} \quad \forall \bar{\rho} > 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством  $|\det(1 + Y')| \leq (1 - m\|Y'\|)^{-1}$  (задача (3.6.22,1)). Из него и получаем границы для  $\tilde{C}^{(1)}(0)^{-1}$ , так как

$$\|\tilde{C}^{(1)}(0)^{-1}\| \leq \|\tilde{C}(0)^{-1}\| (1 - m^2\|\tilde{C}(0)^{-1}\| \cdot \|\tilde{C}(0) - \tilde{C}^{(1)}(0)\|)^{-1}$$

(задача (3.6.22,2)). Из неравенства (3.6.11) заключаем, что

$$\|Y'\|_{\rho-2h} \leq 4\Gamma^3 c^2 h^{-2\tau} \|H_1\|_\rho / m,$$

и, обобщая полученное неравенство на  $n$ -й шаг, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{C}^{(n)}(0)^{-1}\|}{\|\tilde{C}^{(n-1)}(0)^{-1}\|} &\leq \left( 1 - 2m^2\|\tilde{C}^{(n-1)}(0)^{-1}\| \cdot \|C\|_{\rho_n} \cdot \right. \\ &\cdot \left. 2 \frac{12\Gamma^3 c^2 h^{-2\tau} 3^{2\tau(n-1)} \|H_n\|_{\rho_n} + 16\Gamma^6 c^4 h^{-4\tau} 3^{4\tau(n-1)} \|H_n\|_{\rho_n}^2}{1 - 4\Gamma^3 c^2 h^{-2\tau} 3^{2\tau(n-1)} \|H_n\|_{\rho_n}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, при тех же условиях, что и в (3.6.17), величина  $\|\tilde{C}^{(n)}(0)^{-1}\|$  остается ограниченной по  $n$  (задача (3.6.22,3)):  $\|\tilde{C}^{(n)}(0)^{-1}\| < 2\|\tilde{C}(0)^{-1}\| \quad \forall n$ .

Убедившись в том, что величина  $\Gamma$  остается ограниченной, сводим результаты Колмогорова, Арнольда и Мозера (КАМ) в следующую теорему.

**Теорема КАМ (3.6.19)**

Предположим, что для функции Гамильтона  $H$ , задаваемой соотношением (3.6.1),

(i)  $|(\omega \cdot k)|^{-1} < c|k|^{\tau-m-1} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$  для  $c > 0, \tau \geq 1$ ;

(ii)  $A, B$  и  $C$  аналитичны в полосе  $|\operatorname{Im} \bar{\varphi}_j| < \rho$ ;

(iii)  $\sup_{|\operatorname{Im} \bar{\varphi}_j| < \rho} \max(|A|, |B_j|) \leq h^{3\tau} (16c^3 3^\tau m^6 (2 \sup_{|\operatorname{Im} \bar{\varphi}_j| < \rho} \max\{\|C\|, \|\tilde{C}(0)^{-1}\|\})^6)^{-1}$ ,

при  $h < \min\{2\rho/9, c^{-1/\tau}\}$ .



Тогда существует каноническое преобразование к переменным  $\varphi^{(\infty)}, I^{(\infty)}$ , аналитическое по  $\rho$  в  $|\operatorname{Im} \varphi_j| < \rho - 9h/2$  и аффинное<sup>14</sup> по  $I$ , такое, что

$$H = \omega_j I_j^{(\infty)} + \frac{1}{2} C_{ij}^{(\infty)}(\varphi^{(\infty)}) I_i^{(\infty)} I_j^{(\infty)},$$

где  $C^{(\infty)}$  аналитичны в  $|\operatorname{Im} \varphi_j^{(\infty)}| < \rho - 9h/2$ .

#### Примечания (3.6.20)

1. Как мы уже упоминали, теорема КАМ допускает обобщение на функции Гамильтона более общего вида, а требование аналитичности можно ослабить, заменив требованием дифференцируемости достаточное число раз.
2. Условие (iii) в дальнейшем не является необходимым, однако до сих пор не удалось усовершенствовать его настолько, чтобы существенно улучшить сильное убывание по  $m$ . Для системы со многими степенями свободы применимость теоремы КАМ требует до смешного малых возмущений, что ставит под сомнение ее физическую значимость.
3. Утверждение теоремы КАМ означает, что под действием  $\Phi_t^0$  инвариантный тор  $I = 0$  лишь слегка деформируется, если возмущение мало в соответствии с ограничениями, налагаемыми независимостью частот. О других значениях  $I$  аналогичная процедура может быть осуществлена только в том случае, если выполнено условие частот. Поэтому невозможно преобразовать систему в некоторую интегрируемую систему во всей окрестности тора  $I = 0$ .
4. Хотя открытые области, на которых нарушается (3.6.19), всюду плотны, однако их полная мера на компактных областях стремится к нулю при более сильных возмущениях. Движение на этих множествах хаотическое, и только при  $m = 2$  эти множества разбиваются на несвязные компоненты инвариантными поверхностями. В этом случае траектория не может покидать часть фазового пространства, ограниченного инвариантными торами (рис. 3.24).

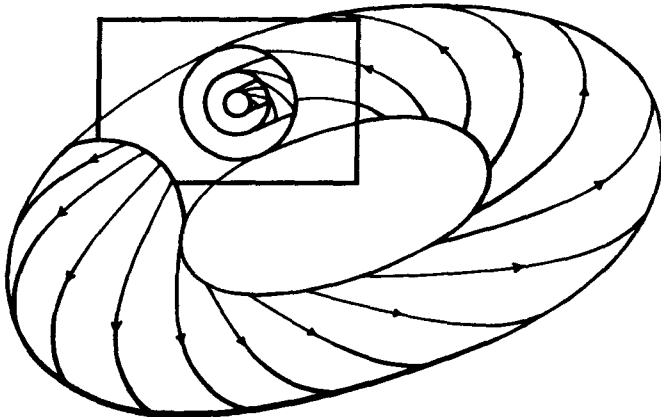


Рис. 3.24. Инвариантные торы

5. При выяснении того, не являются ли инвариантные подмногообразия математически патологиями, соображения, основанные на теории меры, более существенны, чем топологические. С точки зрения топологии инвариантные подмножества следовало бы

<sup>14</sup>Аффинное — неоднородное линейное, т.е. вида  $I \rightarrow aI + b$ .

назвать исключительными как дополнение открытых всюду плотных подмножеств. Но поскольку инвариантные подмножества обладают достаточно большой мерой Лиувилля, то их правильнее рассматривать как правило, чем как исключение. С другой стороны, так как неустойчивая область всюду плотна, а все измерения производятся с конечной точностью, то невозможно с полной уверенностью утверждать, что находишься в устойчивой области.

### Пример (3.6.21)

**Двойной маятник.** Уже в двумерной области двойной маятник является неинтегрируемой системой, которая великолепно иллюстрирует существенные особенности теоремы КАМ. Если обозначить два угла через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и положить массы и длины равными единице, то кинетическую энергию можно записать в виде

$$2T = \dot{\varphi}_1^2 + (\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_2)^2 + (\dot{\varphi}_1(1 + \cos \varphi_2) + \dot{\varphi}_2)^2,$$

а потенциальную энергию гравитационного поля (с  $g = 1$ ) — в виде

$$V = 2 \cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + 3.$$

Это порождает гамильтонов поток без других постоянных, но в предельных случаях  $E \downarrow 0$  и  $E \uparrow \infty$  возникает простая ситуация. В первом — вокруг минимума потенциала ( $\varphi_1 = \pi$ ,  $\varphi_2 = 0$ ) существуют малые колебания, во втором — потенциальная энергия  $V$  пренебрежимо мала, и угловой момент (в классической механике — момент импульса)  $L$  служит новой постоянной движения. Между этими пределами система ведет себя хаотически, и при изменении энергии можно наблюдать разрушение инвариантных торов. Проследить разрушение аналитически невозможно, однако можно прибегнуть к компьютерным экспериментам [22]. Они показывают, что торы  $L = \text{const}$  при  $E = 20$  начинают заметно деформироваться, а при  $E = 10$  большинство торов растворяются в хаотической системе, и, наконец, вблизи  $E = 6$  исчезает последний тор, соответствующий отношению частот, равному золотому сечению  $(\sqrt{5} - 1)/2$ . При малых значениях энергии  $E < 1,5$  инвариантные торы кристаллизуются из хаоса с тем, чтобы при  $E \downarrow 0$  восстановилась картина, обычная для двумерного гармонического осциллятора. Графически перестройка инвариантных торов представлена на так называемых **сечениях Пуанкаре**. Они показывают, в каких точках траектории проходят сквозь плоскость  $(L_1, \varphi_1)$  при  $\varphi_2 = 0$ . Периодическим траекториям в сечениях Пуанкаре соответствует изолированная точка, квазипериодическим траекториям — линия и хаотическим траекториям — целые полосы. На рис. 3.25 эта ситуация показана для некоторых типичных энергий.

В заключение общего обзора гамильтоновых систем сформулируем впечатления, которые создаются у нас относительно глобальной структуры канонического потока.

В стандартном для физики случае, когда силы убывают с увеличением расстояния, частицы с достаточно большой энергией могут “убегать”. В этом случае их импульсы стремятся к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$ , и система становится интегрируемой в тех частях фазового пространства, в которых скапливается достаточно много “убежавших” частиц. В таких областях все траектории диффеоморфны  $\mathbb{R}$ , и канонический поток может быть преобразован в линейный.

Траектории, которые всегда возвращаются, заполняют многообразия высокой размерности, что открывает возможность возникновения сложнейших ситуаций. В частном случае интегрируемых систем эти многообразия имеют вид  $m$ -мерных торов, вырождающихся в области более низкой размерности, в тех частях фазового пространства, которые соответствуют рациональной зависимости частот. При включении возмущений некоторые торы разрушаются, и траектория покрывает  $(2m - 1)$ -мерную область, в то время как некоторые другие торы сохраняются и на них система ведет себя, как интегрируемая.

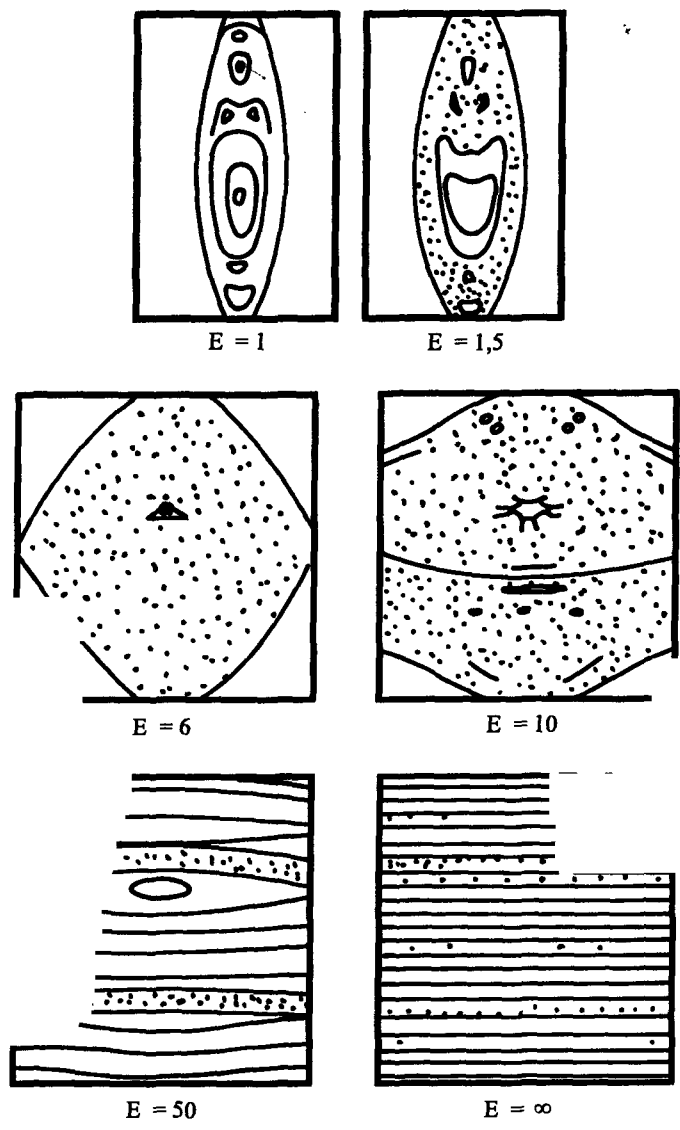


Рис. 3.25. Сечения Пуанкаре для двойного маятника при различных энергиях

## Задачи (3.6.22)

1. Докажите, что  $|\det(1 + M)| < 1/(1 - m\|M\|)$  при  $\|M\| < 1/m$ , где  $M$  – эрмитова матрица размерности  $(m \times m)$  (см. 3.6.12,1).
2. Докажите, что если

$$\|(M_0 + M_1)^{-1}\| \leq \|M_0^{-1}\|(1 - m^2\|M_1\| \cdot \|M_0\|^{-1})^{-1},$$

то

$$m^2\|M_1\|/\|M_0\| < 1.$$

3. Доведите до конца вывод оценки (3.6.18).
4. Исследуйте сходимость ряда теории возмущений Гамильтона

$$H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2) + \frac{c}{8}(p^2 + q^2)^2 + \frac{b}{2}q^2$$

в  $T^*(\mathbb{R})$ . (В безразмерных переменных действие-угол величины  $\omega$ ,  $c$ ,  $b$  имеют размерность функции Гамильтона  $H$ .)

## Решения (3.6.23)

1. В диагональном представлении имеем

$$\begin{aligned} \det(1 + M) &= \exp[\operatorname{tr} \ln(1 + M)] = \exp \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-)^{j+1}}{j} \operatorname{tr} M^j \right] \leq \\ &\leq \exp \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} (m\|M\|)^j \right] = \frac{1}{1 - m\|M\|}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (M_0 + M_1)^{-1} &= M_0^{-1} - M_0^{-1}M_1(M_0 + M_1)^{-1} \implies \\ \implies \|(M_0 + M_1)^{-1}\| &\leq \|M_0^{-1}\| + \|(M_0 + M_1)^{-1}\|m^2\|M_0\|^{-1}\|M_1\|. \end{aligned}$$

3. Подставим (3.6.15) в последнюю из формул (3.6.18) и вспомним, что  $\Gamma$ ,  $\tau$  и  $ch^{-\tau} \geq 1$ . После отбрасывания многих множителей рекуррентная формула упрощается до неравенства

$$x_n \leq \frac{x_{n-1}}{1 - 3^{-\tau(n+2)}} \quad \text{для } x_n := \|\tilde{C}^{(n)}(0)^{-1}\|.$$

Так как  $-\ln(1 - x) \leq x \ln 2 \quad \forall 0 \leq x \leq 1/2$ , то справедливо неравенство

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 3^{-\tau(n+2)})^{-1} \leq \exp \left[ 2 \ln 2 \cdot 3^{-2\tau} \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\tau n} \right] = \exp \left[ 2 \ln 2 \frac{3^{-\tau}}{3^{\tau} - 1} \right] < 2,$$

и поэтому  $\|\tilde{C}^{(n)}(0)^{-1}\| < 2\|\tilde{C}(0)^{-1}\| \quad \forall n$ .

4. В (3.6.19): (i) выполняется для  $\tau = 1$ ,  $c = 1/\omega$ , (ii) выполняется  $\forall h$ . При  $m = 1$  произведение  $\|C\| \|\tilde{C}(0)^{-1}\|$  можно заменить единицей, поэтому в (iii) вместо  $(\dots)^6$  входит только  $(2c)^2$ . Условие выполняется, если

$$\sup_{|\operatorname{Im} \varphi| < h} |b \sin^2 \varphi| = |b| \frac{e^{2h}}{4} \leq \frac{h^3 c^{-2} \omega^3}{3 \cdot 16 \cdot 2^2},$$

т.е. при  $h = 3/2$ ,

$$b \leq \frac{\omega^3}{c^2} \frac{9}{e^{3 \cdot 2^2}} = \frac{\omega^3}{c^2} \cdot 0,003.$$

Численные коэффициенты можно было бы легко улучшить.

## 4. Нерелятивистское движение

### 4.1. Свободные частицы

*Свободные частицы лежат в основе кинематики и служат базой для сравнения более реалистических систем. Для них канонический поток линеен.*

В этой главе мы хотим применить развитые выше математические методы к задачам, поставленным в (1.1.1) и (1.1.2). Начнем с тривиального случая свободных частиц, чтобы проиллюстрировать на нем различные понятия. Здесь  $M = \mathbb{R}^3$ ,  $T^*(M) = \mathbb{R}^6$ , а в качестве карты выберем  $(\mathbb{R}^6, 1)$  (с координатами  $x_i, p_i$ ). Как следует из (2.3.26),  $H$  в этом случае записывают просто в виде

$$H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}. \quad (4.1.1)$$

#### Теорема (4.1.2)

*Точечные преобразования  $H$ , оставляющие инвариантными  $H$ , образуют евклидову группу  $E_3$ :*

$$x_i \rightarrow M_{ij} x_j + \lambda_i, \quad M M^t = 1, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^3.$$

*В  $T^*(\mathbb{R}^3)$  они порождают отображение  $p_i \rightarrow M_{ij} p_j$ .*

**Доказательство:** см. задачу (4.1.13,4)

#### Следствие (4.1.3)

*Каждой однопараметрической подгруппе группы  $E_3$  соответствует канонический поток, оставляющий инвариантной функцию Гамильтона  $H$ , и поэтому существует постоянная движения. Как показано в (3.2.6,2-3), имеются шесть производящих функций:*

$$p_i, L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k.$$

#### Примечания (4.1.4)

1. Так как размерность пространства  $T^*(\mathbb{R}^3)$  всего лишь равна шести и по крайней мере одно измерение должно сохраниться за траекторией, то шесть постоянных движения не могут не быть алгебраическими независимыми. Действительно, выполняется соотношение  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) = 0$ .
2. Возникает вопрос, не существует ли 5-параметрическая подгруппа евклидовой группы  $E_3$ , которая порождала бы независимые постоянные. Можно представить себе следующую конструкцию. Евклидова группа  $E_3$  при фиксированной точке  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  задает отображение:  $E_3 \rightarrow$  энергетическая поверхность, которое сюръективно, но не инъективно. Стабилизатор  $(0, \mathbf{p})$  есть  $\{M, \lambda : \lambda_i = 0, M\mathbf{p} = \mathbf{p}\}$ , т.е. однопараметрическая подгруппа в  $E_3$ , поэтому фактор-группа должна быть 5-мерной и отображается биективно на энергетическую поверхность. Но группа  $E_3$  не абелева, поэтому не каждая ее подгруппа является нормальным делителем, и указанная только что 5-параметрическая фактор-группа не существует.

В расширенном фазовом пространстве переход к равномерно движущейся системе отсчета

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}t, \quad t \rightarrow t' \quad (4.1.5)$$

— хороший кандидат на 3-параметрическую абелеву инвариантную группу. Если (4.1.5) рассматривать как точечное преобразование, то, как следует из (2.4.34,3), импульс преобразуется по закону

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}, \quad E \rightarrow E + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}, \quad (4.1.6)$$

но такая подстановка не оставляет инвариантной функцию  $\mathcal{H} = |\mathbf{p}|^2/2m - E$ . Тем не менее, предположим, что импульсы преобразуются как

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + m\mathbf{v}, \quad E \rightarrow E + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) + \frac{m|\mathbf{v}|^2}{2}, \quad (4.1.7)$$

и хотя это не точечное преобразование, однако вместе с (4.1.5) оно образует 3-параметрическую группу канонических преобразований  $\Phi_{\mathbf{v}}$ , оставляющих инвариантной функцию  $\mathcal{H}$ :

$$\Phi_{\mathbf{v}}^* \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ \Phi_{\mathbf{v}}^{-1} = \mathcal{H}, \quad \Phi_{\mathbf{v}_1} \circ \Phi_{\mathbf{v}_2} = \Phi_{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}. \quad (4.1.8)$$

Новые преобразования в сочетании с предыдущими преобразованиями приводят к следующему определению.

#### Определение (4.1.9)

*Преобразования расширенного фазового пространства*

$$x_i \rightarrow M_{ij}x_j + v_i t + \lambda_i, \quad v_j, \lambda_j \in \mathbb{R}^3, \quad M M^t = \mathbf{1}, \quad t \rightarrow t + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$p_i \rightarrow M_{ij}p_j + mv_i, \quad E \rightarrow E + p_i v_i + \frac{m}{2} v_i^2$$

образуют группу Галилея. Десяти параметрам  $(\lambda_i, M_{ij}, c, v_j)$  соответствуют десять производящих функций  $(p_i, L_i, \mathcal{H}, K_j := p_j t - x_j m)$ .

#### Примечания (4.1.10)

1. В расширенном фазовом пространстве соотношение  $\mathcal{H} = 0$  определяет 7-мерное многообразие. Поэтому для задания траектории достаточно взять шесть постоянных, и между десятью производящими функциями должны возникнуть четыре соотношения. Действительно, имеем  $H = |\mathbf{p}|^2/2m$ ,  $[\mathbf{p} \wedge \mathbf{K}] = \mathbf{L} \cdot m$ , откуда следуют соотношения  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{L}) = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{L}) = 0$ .
2. Скобки Пуассона производящих функций не могут быть выражены только через постоянные движения, поскольку в правую часть соотношения  $\{p_j, K_i\} = \delta_{ij}m$  входит масса. Но как числовая постоянная масса не порождает преобразования; следовательно  $dm = 0 = X_m$ , и скобки Пуассона для массы с любыми величинами равны нулю. Вместе с массой  $m$ , десять постоянных порождают инфинитезимальные элементы 11-параметрической группы, фактор-группа которой по центру есть группа Галилея. Центр в данном случае — это порожденная массой  $m$  однопараметрическая группа, которая тривиально реализуется в фазовом пространстве.
3. Существует подгруппа, поставляющая шесть независимых постоянных, из которых можно построить все десять образующих функций группы Галилея. Эта подгруппа порождается импульсом  $\mathbf{p}$  и угловым моментом  $\mathbf{K}$  (см. примечание (4.1.10,1)). Так как масса  $m$  снова входит в скобки Пуассона:

$$\{p_i, K_j\} = \delta_{ij}m, \quad \{p_i, p_j\} = \{K_i, K_j\} = 0,$$

то группа преобразований

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{v}t, & t &\rightarrow t, \\ \mathbf{p} &\rightarrow \mathbf{p} + m\mathbf{v}, & E &\rightarrow E + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) + \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

изоморфна фактор-группе по центру. Эта подгруппа минимальна, так как с помощью меньшего числа параметров невозможно породить шесть постоянных движения. Группа Галилея (4.1.9) не обладает каким-либо особым свойством: она не является ни наибольшей группой инвариантности, ни наименьшей группой, порождающей все постоянные движения.

### N свободных частиц (4.1.12)

Чтобы обобщить приведенные выше соображения на функцию Гамильтона

$$H = \sum_{n=1}^N |\mathbf{p}_i|^2 / 2m_i,$$

приведем функцию  $H$  с помощью канонического преобразования  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i / \sqrt{m_i}$ ,  $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_i \sqrt{m_i}$  к виду  $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |\mathbf{p}_i|^2$ . Тогда на  $T^*(M) = T^*(\mathbb{R}^{3N}) = \mathbb{R}^{6N}$  существуют  $3N + 3N(3N - 1)/2$  постоянных движения  $p_\mu$  и  $p_\mu x_\nu - x_\mu p_\nu$ ,  $\mu, \nu = 1, \dots, 3N$ . В координатах  $p_\mu$  система интегрируема, хотя подмногообразие  $p_\mu = \alpha_\mu = \text{const}$  не компактно, а диффеоморфно пространству  $\mathbb{R}^{3N}$ . Все траектории имеют вид  $x_\mu \rightarrow x_\mu + t p_\mu$  и при  $p \neq 0$  являются подмногообразиями, диффеоморфными  $\mathbb{R}$ .

### Задачи (4.1.13)

1. Докажите, что  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{v}t$ ,  $\bar{t} = t$ ,  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + m\mathbf{v}$ ,  $\bar{E} = E + \mathbf{p}\mathbf{v} + m|\mathbf{v}|^2/2$  с членом  $m|\mathbf{v}|^2/2$  и без него — каноническое преобразование. Почему же в (4.1.7) включен член  $m|\mathbf{v}|^2/2$ ?
2. Вычислите скобки Пуассона производящих функций группы Галилея.
3. Рассмотрите группу канонических преобразований, порожденную  $D = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})$ .
4. Докажите, что евклидова группа — самая большая группа точечных преобразований, оставляющая инвариантной функцию Гамильтона  $H$ .

### Решения (4.1.14)

1. Проверим, что единственные нетривиальные скобки Пуассона имеют вид  $\{\bar{x}_i, \bar{E}\} = v_i - v_i = 0$ . Без  $m|\mathbf{v}|^2/2$  не существует группы канонических преобразований:

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda L(\mathbf{K}, \mathbf{v})} E|_{\lambda=0} = \{E, \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}\} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}), \quad \frac{d^2}{d\lambda^2} e^{\lambda L(\mathbf{K}, \mathbf{v})} E|_{\lambda=0} = \{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}), (\mathbf{K} \cdot \mathbf{v})\} = m|\mathbf{v}|^2.$$

2.  $\{p_i, p_j\} = \{p_i, E\} = \{L_i, E\} = \{K_i, K_j\} = 0, \quad \{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k,$   
 $\{p_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{K_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} K_k, \quad \{E, K_j\} = p_j, \quad \{p_i, K_j\} = m\delta_{ij}.$
3.  $D$  порождает растяжение  $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rightarrow (e^\lambda \mathbf{x}, e^{-\lambda} \mathbf{p})$ . Оно оставляет инвариантным  $L$ , поэтому растяжения с евклидовой группой порождают 7-параметрическую группу канонических преобразований. Так как  $H$  при растяжении изменяется на множитель  $e^{-2\lambda}$ , то  $\ddot{\mathbf{x}} = 0$  остается инвариантным.
4. Так как новые координаты  $\bar{x} \quad \forall x$  должны удовлетворять соотношению  $\bar{x}_{m,i}(x) \bar{x}_{m,k}(x) = \delta_{ik}$ , то заключаем, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_{m,ij} \bar{x}_{m,k} + \bar{x}_{m,i} \bar{x}_{m,kj} &= 0 & \Downarrow \\ \bar{x}_{m,jk} \bar{x}_{m,i} + \bar{x}_{m,j} \bar{x}_{m,ik} &= 0 & \Downarrow \\ -\bar{x}_{m,ki} \bar{x}_{m,j} - \bar{x}_{m,k} \bar{x}_{m,ji} &= 0 & \Downarrow \\ \hline 2 \bar{x}_{m,i} \bar{x}_{m,kj} = 0 &\Rightarrow \bar{x}_{m,kj} = 0 \end{aligned}$$

Поэтому преобразование — неоднородное линейное, т.е. имеет вид (4.1.2). Подставляя его в исходное выражение, приходим к равенству  $M M^t = \mathbf{1}$ .

## 4.2. Задача двух тел

Решение задачи двух тел Ньютоном ознаменовало рождение математической физики. Эта задача на протяжении столетий так и не утратила своей привлекательности отчасти потому, что она остается разрешимой и при всевозможных усовершенствованиях теории (в релятивистской электродинамике и теории гравитации, нерелятивистской и релятивистской квантовой механике).

Соотношения (2.3.21)–(2.3.26) при  $N = 2$  принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} M &= \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) : \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2\}, \\ H &= \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{2m_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|^2}{2m_2} + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}, \quad \alpha = e_1 e_2 - \kappa m_1 m_2. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Разложим решение на следующие этапы.

**Разделение координат на координаты центра масс и относительные координаты (4.2.2)**

Точечное преобразование  $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$

$$\mathbf{x}_s = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2,$$

индуцирует в  $T^*(\mathbb{R}^6)$  преобразование

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} - \mathbf{p}_2 \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

откуда

$$H = \frac{|\mathbf{p}_s|^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{|\mathbf{p}|^2(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2} + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}|} =: H_s + H_r.$$

### Примечания (4.2.3)

1. В этих координатах  $M$  ограничено на  $\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})$ ,  $H \in C^\infty(T^*(M))$ , тогда исключаются сингулярности в потенциалах.
2. Так как  $H_s$  зависит только от  $\mathbf{p}_s$ , а  $H_r$  — только от  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{p}$ , то эволюция во времени есть прямое произведение потоков, задаваемых  $H_s$  и  $H_r$ , причем  $\{H_s, H_r\} = 0$ .
3.  $H_s$  имеет вид  $H$  из параграфа 4.1 (с массой, равной  $m_1 + m_2$ ), поэтому данную часть задачи можно считать решенной и в дальнейшем заняться только вторым слагаемым.
4.  $H_r$  есть предел выражения (4.2.1), в котором одна частица имеет бесконечную, а другая — приведенную массу  $m := m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ .

### Постоянные движения (4.2.4)

$$\{H_r, \mathbf{L}\} = \{H_r, \mathbf{F}\} = 0, \quad \mathbf{L} = [\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}], \quad \mathbf{F} = [\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}] + m\alpha \frac{\mathbf{x}}{r},$$

где  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ,  $r = |\mathbf{x}|$ . ( $\mathbf{F}$  называется вектором Ленца.)

### Доказательство

Постоянство углового момента  $\mathbf{L}$  следует из инвариантности  $H_r$  относительно  $x_i \rightarrow M_{ij} x_j$ ,  $p_i \rightarrow M_{ij} p_j$ . Постоянство вектора Ленца  $\mathbf{F}$  можно проверить непосредственно

$$\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, H_r\} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \alpha \frac{\mathbf{x}}{r^3} : \quad \dot{\mathbf{F}} = \frac{\alpha}{r^3} [\mathbf{x} \wedge [\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}]] + \alpha \frac{\mathbf{p}}{r} - \alpha \frac{\mathbf{x}}{r^3} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) = 0. \quad \square$$



## Примечания (4.2.5)

1. От  $E_3$  остаются вращения, так как функция  $H_r$  не инвариантна относительно сдвигов. Постоянные  $[\mathbf{p} \wedge \mathbf{L}]$  при  $\alpha \neq 0$  обобщаются до  $\mathbf{F}$ . Относительно порожденных вектором Ленца  $\mathbf{F}$  преобразований, оставляющих инвариантной функцию  $H_r$ , см. задачу (4.2.24,1).
2. Угловой момент  $\mathbf{L}$  следует рассматривать как внутренний угловой момент (спин) и не смешивать с угловым импульсом центра масс  $[\mathbf{x}_s \wedge \mathbf{p}_s]$ . Оба угловых импульса сохраняются в отличие от угловых импульсов каждой из частиц  $[\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{p}_1]$  и  $[\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{p}_2]$  в отдельности.
3. Из семи постоянных движения  $H_r$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{F}$  во втором слагаемом независимыми могут быть только пять. Действительно, их связывают два соотношения:

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{F}) = 0, \quad |\mathbf{F}|^2 = 2m|\mathbf{L}|^2 H_r + m^2 \alpha^2. \quad (4.2.6)$$

Следовательно, вектор Ленца  $\mathbf{F}$  лежит в плоскости, ортогональной угловому моменту  $\mathbf{L}$  (в плоскости траекторий), а его длина определяется  $|\mathbf{L}|$  и  $H_r$ .

## Группа инвариантности (4.2.7)

Группа инвариантности определяется скобками Пуассона постоянных движения, которые могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \varepsilon_{ijk} L_k, & \{L_i, F_j\} &= \varepsilon_{ijk} F_k, \\ \{F_i, F_j\} &= -2mH_r \varepsilon_{ijk} L_k, & \{H_r, L_i\} &= \{H_r, F_i\} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

(см. задачу (4.2.24,2)). Порождаемые постоянными  $L_i$  и  $F_j$  потоки оставляют инвариантным подмногообразие  $H_r = E \in \mathbb{R}$ , а поскольку на нем скобки Пуассона от  $L_i$  и  $F_j$  представимы в виде линейных комбинаций постоянных движения  $L_i$  и  $F_j$ , то порождаемые ими потоки, как следует из (3.2.7), образуют группу, центр которой есть эволюция во времени. На подмногообразии  $H_r = E$  при  $E < 0$ ,  $E = 0$  или  $E > 0$  эта группа изоморфна, соответственно,  $SO(4)$ ,  $E_3$  или  $SO(3, 1)$ . Чтобы убедиться в этом, введем в первом случае, при  $E < 0$ ,

$$A_i = \frac{1}{2} \left( L_i + \frac{F_i}{\sqrt{-2mE}} \right), \quad B_i = \frac{1}{2} \left( L_i - \frac{F_i}{\sqrt{-2mE}} \right).$$

Так как

$$\{A_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k, \quad \{B_i, B_j\} = \varepsilon_{ijk} B_k, \quad \{A_i, B_j\} = 0,$$

то заключаем, что группа инвариантности изоморфна  $SO(3) \times SO(3) = SO(4)$ . При  $E = 0$  аналогичное утверждение следует из (4.2.8), а при  $E > 0$  величины  $A$  и  $B$  — комплексно сопряженные.

## Примечания (4.2.9)

1.  $SO(4)$  не факторизуется в виде: (вращения, порождаемые  $\mathbf{L}$ )  $\times$  (любые другие вращения). Ситуация гораздо более сложная.
2. При  $E = 0$  вектор Ленца  $\mathbf{F}$  играет роль  $\mathbf{p}$  в  $E_3$ .
3. Так как потоки задают непрерывные отображения группы в фазовое пространство, то некомпактность групп  $E_3$  и  $SO(3, 1)$  соответствует при  $H_r \geq 0$  неограниченным траекториям.

### Форма траекторий (4.2.10)

Проекцию траекторий на  $M$  удобнее всего вычислять с помощью (4.2.4)

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{L}|^2 + m\alpha r \Rightarrow r = \frac{|\mathbf{L}|^2}{|\mathbf{F}| \cos \varphi - m\alpha}, \quad \varphi = \angle(\mathbf{F}, \mathbf{x}).$$

Это конические сечения, которые лежат в области  $\{(\mathbf{L} \cdot \mathbf{x}) = 0$  (плоскость траекторий) $\} \cap \{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}) > m\alpha\}$ . Необходимо различать следующие случаи (рис. 4.1):

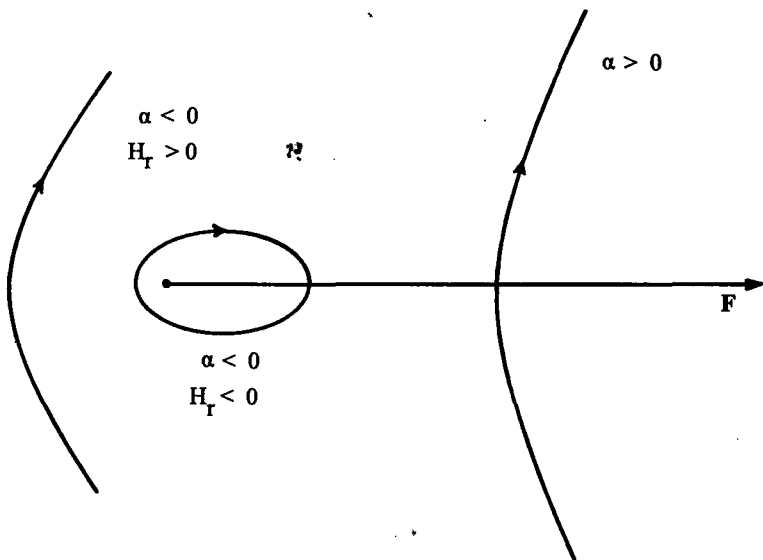


Рис. 4.1. Кеплеровские траектории

- (i)  $H_r > 0$ : из (4.2.6) следует, что  $|\mathbf{F}| > |m\alpha|$  и  $r$  обращается в бесконечность при  $\varphi = \arccos m\alpha/|\mathbf{F}|$  (траектория — гипербола);
- (ii)  $H_r = 0$ ,  $|\mathbf{F}| = |m\alpha|$ ,  $r$  обращается в бесконечность при  $\varphi = 0$  (траектория — парабола);
- (iii)  $H_r < 0$ ,  $|\mathbf{F}| < |m\alpha|$ ,  $r$  остается конечным (траектория — эллипс).

### Примечания (4.2.11)

1. Случаи (ii) и (iii) возможны только при  $\alpha \leq 0$ .
2. Траектории, проходящие через начало, имеют  $\mathbf{L} = 0$ . На инвариантном по времени подмногообразии  $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{p}) : [\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}] = 0\}$  существует канонический поток, так как  $H_r$  порождает на этом подмногообразии полное векторное поле.
3. Траектория  $\mathbf{p}(t)$  всегда лежит на некоторой окружности (задача (4.2.24,6)).

### Время, прошедшее от начала движения (4.2.12)

Импульс, канонически сопряженный с  $r$ , равен  $p_r := (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})/r$ , что позволяет записать  $H_r$  в виде

$$H_r = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}.$$

Таким образом, на инвариантном подмногообразии  $\mathbf{L} = \text{const}$  радиальное движение сводится к одномерному движению, в котором к первоначальному потенциалу добавляется центробежный член  $|\mathbf{L}|^2/2mr^2$ . Интегрируя

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - \frac{\alpha}{r} - \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2}},$$

получаем (см. задачу (4.2.24,7))

$$\begin{aligned} t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr' r' \sqrt{m/2}}{\sqrt{r'^2 E - \alpha r' - |\mathbf{L}|^2/2m}} &= \left| r \sqrt{\frac{m}{2E}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{rE} - \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2 E}} + \frac{\alpha \sqrt{m/2}}{2|E|^{3/2}} \times \right. \\ &\times \left. \begin{cases} \ln \left( Er - \frac{\alpha}{2} + \sqrt{E(r^2 E - \alpha r - |\mathbf{L}|^2/2m)} \right) & \text{при } E > 0, \\ \arcsin \frac{2Er - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2E|\mathbf{L}|^2/2m}} & \text{при } E < 0. \end{cases} \right|_{r_0}^r \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

**Следствие (3-й закон Кеплера) (4.2.14)**

Если  $E < 0$ , то

$$r = r_0 \quad \text{при} \quad t = t_0 + \tau,$$

где  $\tau = 2\pi a^{3/2} \sqrt{m/|\alpha|}$ ,  $a = |\alpha|/2|E|$  — большая полуось эллипса.

**Примечания (4.2.15)**

1. Сохранение углового момента  $\mathbf{L}$  сводит задачу с центральной силой к одномерной. Замкнутость траектории и, следовательно, вырожденность радиального и углового движений следуют из более богатой группы инвариантности потенциала  $1/r$ .  $H$  зависит только от суммы переменных действия.
2. Так как величина  $\tau$  пропорциональна  $a^{3/2}$  и, таким образом, растет быстрее, чем длина орбиты, то скорость движения тем меньше, чем дальше орбита, что соответствует теореме о вириале, о которой пойдет речь дальше. Согласно этой теореме, кинетическая энергия пропорциональна потенциальной, и, следовательно, скорость пропорциональна  $\sim a^{-1/2}$ .
3. В нашей планетной системе третий закон Кеплера особенно наглядно проявляется для Меркурия и Плутона — самой близкой к Солнцу и самой далекой от него планет: их расстояния от Солнца относятся как 1:100, а периоды обращения — как 1:1000.

При  $H_r \geq 0$  частицы удаляются в бесконечность, и некоторые величины стремятся к постоянным. Это позволяет нам воспользоваться понятиями определения (3.4.1), причем нас интересует только ограничение на инвариантное по времени подмногообразие  $H_r > 0$ .

**Асимптотические постоянные движения (4.2.16)**

$$\text{где } \mathbf{p}, \frac{\mathbf{x}}{r}, \frac{1}{r} \in \mathcal{A}.$$

**Доказательство**

Чтобы убедиться в том, что при  $E > 0$  импульс асимптотически постоянен, воспользуемся

уравнением  $|\dot{\mathbf{p}}| = |\alpha|/r^2$ . Из (4.2.13) заключаем, что величина  $r$  пропорциональна  $t$  при  $E > 0$  и  $t \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что признак сходимости Коши

$$|\mathbf{p}(T_2) - \mathbf{p}(T_1)| = \left| \int_{T_1}^{T_2} dt \dot{\mathbf{p}}(t) \right| \leq |\alpha| \int_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{r(t)^2} \leq \text{const} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \rightarrow 0$$

выполняется при  $T_2 > T_1 \rightarrow \infty$ . Аналогичное утверждение выполняется и при  $t \rightarrow -\infty$ . Поэтому существуют

$$\mathbf{p}_{\pm} := \tau_{\pm} \mathbf{p} \quad \text{при } E > 0.$$

Из этого заключаем, что частицы разлетаются под определенным углом, так как из сходимости величины  $p(t)$  вытекает сходимость среднего в смысле Абеля:

$$\tau_{\pm} \left( \frac{\mathbf{x}}{r} \right) = \lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{T} \mathbf{x}(0) + \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\mathbf{p}(t)}{m}}{\left| \frac{1}{T} \mathbf{x}(0) + \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{\mathbf{p}(t)}{m} \right|} = \pm \frac{\mathbf{p}_{\pm}}{|\mathbf{p}_{\pm}|}.$$

Наконец,  $\tau_{\pm} \left( \frac{1}{r} \right) = 0$  при  $E > 0$ . □

Функции  $K(\mathbf{x}/r, \mathbf{p})$  тривиально сходятся при  $t \rightarrow \pm\infty$  в пределе и  $K = K(\pm \mathbf{p}_{\pm}/|\mathbf{p}_{\pm}|, \mathbf{p}_{\pm})$ .

**Следствия (4.2.17)**

1.  $E = |\mathbf{p}_{\pm}|^2/2m$ .
2.  $\mathbf{F} = [\mathbf{p}_{\pm} \wedge \mathbf{L}] \pm \eta \mathbf{p}_{\pm}, \quad \eta := \alpha \sqrt{m/2E}$ .

**Примечания (4.2.18)**

1. Последнее соотношение нетрудно разрешить относительно предельных импульсов:

$$\mathbf{p}_{\pm} = \frac{[\mathbf{L} \wedge \mathbf{F}]}{|\mathbf{L}|^2 + \eta^2} \pm \frac{\eta}{|\mathbf{L}|^2 + \eta^2} \mathbf{F}.$$

Полученный результат имеет очевидное следствие:  $\mathbf{p}_+$  возникает из  $-\mathbf{p}_-$  при отражении относительно  $\mathbf{F}$ .

2. Преобразование Мёллера (3.4.4), использующее свободное движение для потока сравнения  $\Phi_t^0$ , в рассматриваемом случае просто не существует. Из (4.2.13) следует, что при больших временах

$$r - t \sqrt{\frac{2E}{m}} \sim \frac{|\alpha| \sqrt{m/2}}{2E^{3/2}} \ln t,$$

а для  $\Phi_t^0$  левая часть — константа. Если бы потенциал убывал как  $r^{-1-\epsilon}$ , то члена  $\ln t$  не было бы, и композиция потоков и  $\Phi_{-t} \circ \Phi_t^0$  сходилась бы.

3. Существуют другие простые разновидности эволюции во времени, к которым поток асимптотически приближается;  $H_0 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \frac{m\alpha}{|\mathbf{p}|t}$  порождает такой поток. Однако он явно зависит от  $t$ , поэтому поток  $\Phi_t^0$  не образует однопараметрическую группу, в силу чего следствия из (3.4.4) несколько утрачивают свое изящество.

## Преобразование рассеяния (4.2.19)

Так как  $\Omega_{\pm}$  не существуют, то определяем  $S$  с помощью алгебры  $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}$ , на которой  $\tau_-$  — автоморфизм и  $\mathcal{A}_s \subset \{H_r\}'$ :

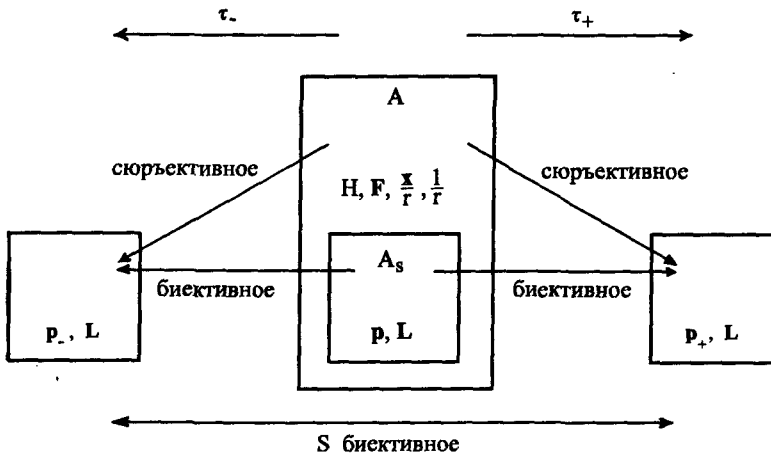
$$\tau_-^{-1} \circ \tau_+ f = f \circ S^{-1} \quad \forall f \in \tau_- \mathcal{A}_s = \tau_+ \mathcal{A}_s = \{H_r\}'.$$

Поскольку нас интересуют импульсы, то в качестве  $\mathcal{A}_s$  разумно выбрать алгебру, порожденную  $p_-$  и  $L$ . Тогда из (4.2.18,1) с помощью вычислений находим

$$p_+ = p_- \circ S^{-1} = \frac{L^2 - \eta^2}{L^2 + \eta^2} p_- + \frac{2\eta}{L^2 + \eta^2} [p_- \wedge L]. \quad (4.2.20)$$

## Примечания (4.2.21)

1. Схематически ситуацию можно представить следующим образом:



- S** зависит от выбора  $\mathcal{A}_s$ . Если выбрать в качестве  $\mathcal{A}_s$  пересечение  $\{H\}' \cap \{H_0\}'$ , то можно положить  $S = 1$ .
- Действием на  $p_-$  и  $L$  преобразование рассеяния  $S$  еще не определяется как каноническое преобразование на многообразии  $H_r > 0$ . Мы также не хотим доопределять  $S$ , поскольку в противном случае наши действия имели бы произвольный характер.
- Как подчеркивалось в (3.4.10,2),  $S$  оставляет инвариантными не все постоянные движения.  $S$  преобразует  $p_-$  в  $p_+$ , и, будучи примененным к  $F$ , дает  $F \circ S^{-1} = F - 2\eta p_+$ .

## Следствие (4.2.22)

Следствие (4.2.20), угол рассеяния определяется выражением

$$\Theta = \arccos \frac{p_+ p_-}{2mE} = \arccos \frac{L^2 - \eta^2}{L^2 + \eta^2}$$

$$b^2 = \frac{|L|^2}{|p_-|^2} = \frac{\eta^2}{|p_-|^2} \frac{1 + \cos \Theta}{1 - \cos \Theta}$$

(см. 3.4.16.1). Зная  $\Theta$ , нетрудно вычислить сечение рассеяния (3.4.15) ( $\alpha/E$  — минимальное расстояние траектории от центра (“радиус поворота”)):

$$\sigma(\Theta) = \frac{\alpha^2}{16E^2} \sin^{-4} \frac{\Theta}{2}.$$

### Примечания (4.2.23)

1. Сечение рассеяния  $\sigma$  зависит от знака параметра  $\alpha$ : при  $\alpha > 0$  (соответственно,  $\alpha < 0$ ) траектория поворачивает перед (соответственно, за) центром рассеяния.
2. То, что угол рассеяния  $\Theta$  зависит только от комбинации  $\alpha/\sqrt{E}$ , следует из поведения потенциала при растяжении:  $H_r$  можно растянуть в  $E \left( \frac{|p|^2}{2m} + \frac{\alpha}{\sqrt{E}} \frac{1}{r} \right)$ .

Резюмируя, можем утверждать следующее: установлено, что канонический поток глобально существует на фазовом пространстве, ограниченном в (4.2.11, 2), и траектории при  $H_r \geq 0$  и  $H_r < 0$  являются подмногообразиями, диффеоморфными соответственно  $\mathbb{R}$  и  $T^1$ .

### Задачи (4.2.24)

1. Вычислите каноническое преобразование, порожаемое  $F_i$ . Является ли оно точечным преобразованием? Порождают ли  $F_i$  3-параметрическую группу?
2. Проверьте (4.2.8).
3. Докажите, что траектории (4.2.10) — конические сечения с центром в начале координат.
4. Воспользуйтесь третьим законом Кеплера (4.2.14), чтобы вычислить продолжительность падения на Солнце тела с  $r_0$ , равным радиусу земной орбиты, и  $v_0 = 0$ .
5. Вычислите угол рассеяния  $\Theta$  с помощью (4.2.10(i)).
6. Вычислите проекцию траектории на второй множитель в  $T^*(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  (т.е.  $p(t)$ ).
7. В переменных  $u: r = a(1 + \varepsilon \cos u)$ ,  $a = |\alpha/2E|$  — большая полуось,  $\varepsilon = |\mathbf{F}|/m\alpha$  — эксцентриситет, уравнение (4.2.14) при  $E < 0$ ,  $\alpha < 0$  запишется в виде

$$\frac{2|E|^{3/2}}{\alpha \sqrt{m/2}} (t - t_0) = u - \varepsilon \sin u$$

(уравнение Кеплера). Укажите его геометрический смысл.

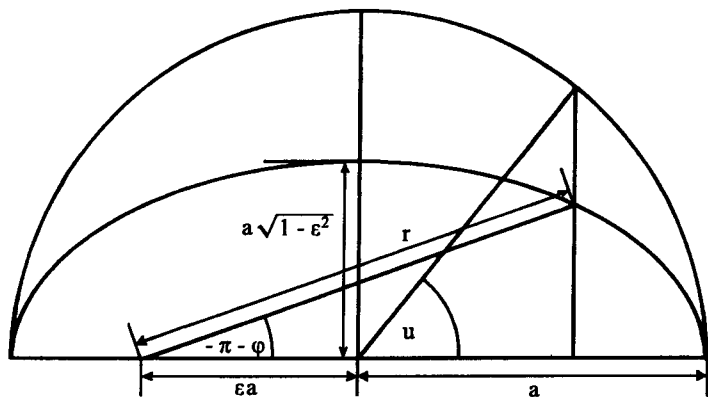


Рис. 4.2. Переменные в уравнении Кеплера

## Решения (4.2.25)

$$1. \quad \begin{aligned} \{F_i, p_k\} &= \delta_{ik} |p|^2 - p_i p_k + m\alpha \left( \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{x_i x_k}{r^3} \right), \\ \{F_i, x_k\} &= \delta_{ik} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) - 2x_i p_k + x_k p_i. \end{aligned}$$

Это не точечное преобразование, так как  $\mathbf{F}$  не линеен по  $\mathbf{p}$ . Поскольку скобки Пуассона  $\{F_i, F_j\}$  не могут быть представлены в виде линейной комбинации величин  $F_i$ , то они не порождают группу.

2. Так как  $L_i$  порождают вращения, а  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{F}$  — векторы, то выполняются следующие соотношения:  $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$ ,  $\{L_i, F_j\} = \varepsilon_{ijk} F_k$ . Для вычисления скобок Пуассона  $\{F_i, F_j\}$  используем  $F_i = x_i |p|^2 - p_i (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) + m\alpha x_i / r$ .

$$3. \quad r \pm \sqrt{(x-A)^2 + z^2} = C \Leftrightarrow (C-r)^2 = A^2 - 2Ax + r^2 \Leftrightarrow r = \frac{A^2 - C^2}{2A \cos \varphi - 2C},$$

где  $x = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$ .

4. Так как траектория тела имеет радиус, равный половине радиуса траектории Земли, то тело упадет на Солнце за время, равное половине его периода обращения вокруг Солнца, т.е. за  $2^{-5/2}$  года.

5.  $\Theta = \pi - 2\varphi$ , где  $\varphi$  — угол при  $r = \infty$ . Поэтому согласно (4.2.6)

$$\cos \Theta = -\cos 2\varphi = 1 - 2\cos^2 \varphi = 1 - 2 \frac{m^2 \alpha^2}{|\mathbf{F}|^2} = 1 - 2 \frac{\eta^2}{|\mathbf{L}|^2 + \eta^2}.$$

$$6. \quad \begin{aligned} [\mathbf{L} \wedge \mathbf{F}] &= p|\mathbf{L}|^2 + m\alpha \left[ \mathbf{L} \wedge \frac{\mathbf{x}}{r} \right] \Rightarrow (\mathbf{p} \cdot [\mathbf{L} \wedge \mathbf{F}]) = |\mathbf{L}|^2 \left( p^2 + m \frac{\alpha}{r} \right) \Rightarrow \left( p - \frac{[\mathbf{L} \wedge \mathbf{F}]}{L^2} \right)^2 = \\ &= |p|^2 - 2 \left( p \cdot \frac{[\mathbf{L} \wedge \mathbf{F}]}{|\mathbf{L}|^2} \right) + \frac{|\mathbf{F}|^2}{|\mathbf{L}|^2} = -2mE + \frac{|\mathbf{F}|^2}{|\mathbf{L}|^2} = \frac{m^2 \alpha^2}{|\mathbf{L}|^2}, \end{aligned}$$

следовательно,  $\mathbf{p}(t)$  лежит на окружности.

$$7. \quad r \cos \varphi = a(\cos u + \varepsilon) \Leftrightarrow r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

### 4.3. Задача о притяжении двумя неподвижными центрами

*Эта задача играет роль промежуточного звена между задачей одного тела и соответственной задачей трех тел. В ней существует не пять независимых постоянных движения, а только три, но система все еще остается интегрируемой.*

В предыдущем параграфе было показано, что задача двух тел сводится к движению частицы в поле бесконечно тяжелого неподвижного тела. Это наводит на мысль рассмотреть в задаче трех тел частный случай, когда одна частица настолько легка, что не влияет на движение двух других. Характер задачи не изменится от того, будем ли мы иметь дело с электрическими или гравитационными силами. Если  $M$  — масса тяжелой, а  $m$  — масса легкой частицы, то с помощью (4.2.14) можно легко оценить по порядку величины частоты обращения тяжелой  $\omega_S$  и легкой  $\omega_L$  частиц. Для этого достаточно воспользоваться тем, что центробежная и центростремительная силы должны уравновешиваться. Следовательно, если  $R$  — радиус орбиты частицы, то

$$M R \omega_S^2 \cong \frac{\kappa M^2 + e^2}{R^2}, \quad m R \omega_L^2 \cong \frac{\kappa m M + e^2}{R^2}. \quad (4.3.1)$$

Если доминирует гравитация, т.е.  $\kappa m M \gg e^2$ , то  $\omega_S^2 = \omega_L^2 = \kappa M / R^3$ , и пренебречь движением легкой частицы при рассмотрении движения тяжелой частицы становится невозможно. Это

непосредственно следует из обнаруженного Галилеем факта: в гравитационном поле тела с различной массой приобретают одинаковое ускорение. Такой случай (так называемая ограниченная задача трех тел) представляет очевидный интерес для космических полетов, но сопряжен с большими аналитическими трудностями и будет рассмотрен нами в следующем параграфе. Более простая ситуация возникает в том случае, когда преобладают электрические силы, т.е.  $\hbar M^2 \ll e^2$ , как это имеет место при рассмотрении элементарных частиц. Действительно, получаем  $\omega_L^2/\omega_S^2 = M/m$ , и движение тяжелых частиц по сравнению с движением легкой происходит сколь угодно медленно, если отношение  $M/m$  достаточно велико. Так происходит, например, в простейшем случае образования молекулы — двух атомов и одного электрона. Правда, классический предел не позволяет обнаружить все особенности движения, важные для физики, поэтому в квантовой теории вернемся к этой задаче.

### Функция Гамильтона (4.3.2)

Для математических рассуждений можем, не ограничивая общности, расположить центры в точках  $(1, 0, 0)$  и  $(-1, 0, 0)$  и исходить из многообразия

$$M_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 0, 0) \cup (-1, 0, 0)\}. \quad (4.3.3)$$

Чтобы избежать усложнений,  $M_0$  и  $T^*(M_0)$  необходимо несколько ограничить. Пусть  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от легкой частицы до центров интенсивности  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (рис. 4.3) и пусть  $m = 1$ . Тогда

$$H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} - \frac{\alpha_1}{r_1} - \frac{\alpha_2}{r_2}. \quad (4.3.4)$$

Так как  $r_{1,2}$  в прямоугольных координатах записываются в довольно громоздком виде

$$\sqrt{(x \pm 1)^2 + y^2 + z^2},$$

то удобнее ввести более подходящие координаты, использующие остающуюся вращательную симметрию.

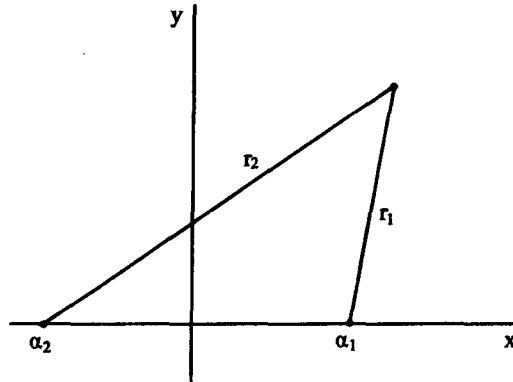


Рис. 4.3. Два силовых центра

### Эллиптические координаты (4.3.5)

В этих координатах получаем диффеоморфизм  $(M_1, \Psi)$ :

$$M_1 = \mathbb{R}^3 \setminus (R, 0, 0) \subset M_0, \quad \Psi(M_1) = \mathbb{R}^+ \times (0, \pi) \times T^1 \ni (\xi, \eta, \varphi),$$

$$\Psi^{-1} : (\xi, \eta, \varphi) \rightarrow (\text{ch } \xi \cos \eta, \text{sh } \xi \sin \eta \cos \varphi, \text{sh } \xi \sin \eta \sin \varphi) = (x, y, z) \in M_1.$$



На  $\Psi(M_1)$  (см. задачу (4.3.22,1))  $H$  можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{-1} \left[ p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\varphi^2 \left( \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \xi} + \frac{1}{\sin^2 \eta} \right) - \alpha \operatorname{ch} \xi - \beta \cos \eta \right],$$

$$\frac{1}{2} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \frac{1}{2} \beta = -\alpha_1 + \alpha_2. \quad (4.3.6)$$

Так как функция  $H$  без множителя  $(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{-1}$  порождала бы интегрируемую задачу, то возвращаемся к (3.2.14,6) для исключения этого множителя с помощью перехода к новой переменной времени. Если в расширенном фазовом пространстве положить

$$\mathcal{H} = 2(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)(H - E) = H_\xi + H_\eta, \quad (4.3.7)$$

где

$$H_\xi = p_\xi^2 + \frac{p_\varphi^2}{\operatorname{sh}^2 \xi} - \alpha \operatorname{ch} \xi - 2E \operatorname{ch}^2 \xi, \quad H_\eta = p_\eta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \eta} - \beta \cos \eta + 2E \cos^2 \eta,$$

то  $\mathcal{H}$  описывает на подмногообразии  $\mathcal{H} = 0$  эволюцию во времени по параметру  $s$ , где  $dt/ds = 2(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) > 0$ .

#### Постоянные движения (4.3.8)

В расширенном фазовом пространстве  $\mathcal{H}$ ,  $E$ ,  $H_\xi$  и  $p_\varphi$  постоянны и независимы друг от друга.

#### Примечания (4.3.9)

1. Так как  $dt/ds > 0$ , то все величины, постоянные по  $s$ , постоянны и по  $t$ . Возвращаясь на  $T^*(M_1)$ , можем воспользоваться величинами  $H$ ,  $p_\varphi$  и  $H_\xi = -H_\eta$  как тремя независимыми постоянными, заменяя  $E$  на  $H$ .
2. Сохранение  $p_\varphi$  связано с цилиндрической симметрией задачи;  $H_\xi$  и  $H_\eta$  порождают сложные канонические потоки.
3. Так как скобки Пуассона между четырьмя сохраняющимися величинами (соответственно,  $H$ ,  $p_\varphi$ ,  $H_\xi$ ) обращаются в нуль, то рассматриваемая система интегрируема в расширенном фазовом пространстве (соответственно в  $T^*(M_1)$ ).
4. Так как других постоянных не существует, то группа инвариантности для  $\mathcal{H}$  (соответственно, для  $H$ ) — четырехпараметрическая (соответственно, трехпараметрическая).

#### Эффективные потенциалы (4.3.10)

Интегрирование уравнений движения с  $\mathcal{H}$  из (4.3.7) приводит к двум одномерным задачам с потенциалами (рис. 4.4–4.7):

$$V_\xi = \frac{p_\varphi^2}{\operatorname{sh}^2 \xi} - \alpha \operatorname{ch} \xi - 2E \operatorname{ch}^2 \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^+,$$

$$V_\eta = \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \eta} - \beta \cos \eta + 2E \cos^2 \eta, \quad \eta \in (0, \pi).$$
(4.3.11)

#### Примечания (4.3.12)

1. Если  $p_\varphi \neq 0$ , то  $V_\xi$  при  $\xi \rightarrow 0$  (соответственно,  $V_\eta$  при  $\eta \rightarrow 0$  или  $\eta \rightarrow \pi$ ) обращается в бесконечность, и траектория не может покинуть  $M_1$ .  $H$  порождает полное векторное поле в  $T^*(M_1) \setminus \{(x, p) : y p_z - z p_y = 0\}$  и существует канонический поток (см. также (4.3.17)).

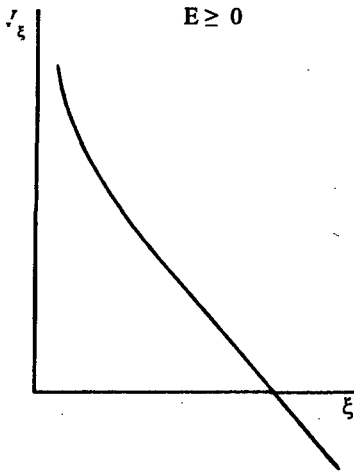


Рис. 4.4. Эффективный потенциал

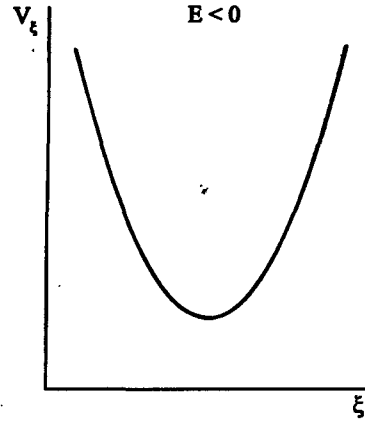


Рис. 4.5. Эффективный потенциал

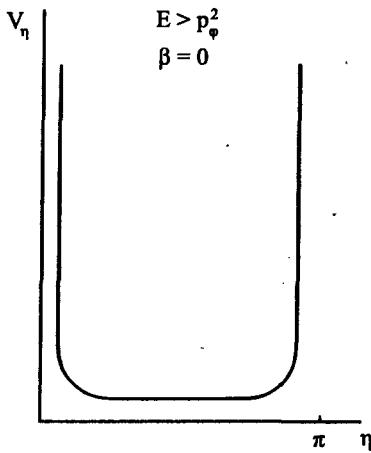


Рис. 4.6. Эффективный потенциал

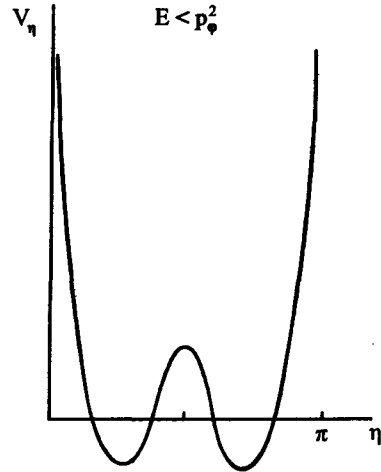


Рис. 4.7. Эффективный потенциал

.. При  $E < 0$   $V_\xi$  стремится к  $\infty$  вместе с  $\xi$ , и траектория остается в некотором компакте. В этом случае выполняются условия теоремы о возвращении (2.6.11), и почти все траектории квазипериодические.

3. По  $\xi$  и  $\eta$  существуют положения равновесия, поэтому существуют и строго периодические траектории.

Инвариантные подмногообразия  $N: H = E, p_\phi = L, H_\xi = K$  компактны при  $E < 0$  и, следовательно, диффеоморфны  $T^3$ , что позволяет нам воспользоваться для определения частот соотношением (3.3.14).

## Переменные действие-угол (4.3.13)

Постоянные движения

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi p_\varphi = L, \quad I_\xi = \frac{1}{2\pi} \oint d\xi p_\xi = \frac{1}{2\pi} \oint d\xi \sqrt{K + 2E \operatorname{ch}^2 \xi + \alpha \operatorname{ch} \xi - \frac{L^2}{\operatorname{sh}^2 \xi}},$$

$$I_\eta = \frac{1}{2\pi} \oint d\eta p_\eta = \frac{1}{2\pi} \oint d\eta \sqrt{-K - 2E \cos^2 \eta + \beta \cos \eta - \frac{L^2}{\sin^2 \eta}} \quad (4.3.14)$$

взаимно независимы, так как

$$J := \frac{\partial(I_\varphi, I_\xi, I_\eta)}{\partial(L, E, K)} = I_{\xi, E} I_{\eta, K} - I_{\xi, K} I_{\eta, E} = \oint \frac{d\xi d\eta (\cos^2 \eta - \operatorname{ch}^2 \xi)}{8\pi^2 p_\xi p_\eta} < 0. \quad (4.3.15)$$

Соответственно, существует  $E(I_\varphi, I_\xi, I_\eta)$ , и производные по переменным действия дают согласно (3.3.15,4) три частоты движения.

## Примечания (4.3.16)

1.  $N$  есть произведение трех торов, на каждом из которых две из трех переменных  $(\varphi, \xi, \eta)$  фиксированы, а третья принимает значения из допустимой области, т.е. из

$$0 < \varphi \leq 2\pi, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2,$$

где границами для  $\xi$  и  $\eta$  служат такие значения, при которых  $p_\xi = 0$ ,  $p_\eta = 0$ .<sup>15</sup> Частоты соответствуют периодам по этим переменным.

2. Частоты непредставимы в явном виде как функции от переменных  $I$  или  $E, K, L$ , так как интегралы в (4.3.13) не сводятся к обычным функциям. Частоты можно записать в виде

$$\omega_\varphi = \frac{(I_{\xi, K} I_{\eta, L} - I_{\xi, L} I_{\eta, K})}{J}, \quad \omega_\xi = \frac{I_{\eta, K}}{J}, \quad \omega_\eta = \frac{I_{\xi, K}}{J}.$$

Так как функции от  $E, K, L$  непрерывно варьируются от тора к тору, то они в общем случае не зависят друг от друга рационально, и траектория всюду плотно заполняет трехмерную область. В этой части фазового пространства других постоянных движения не существует.

3. Поскольку кривые  $\xi = \operatorname{const}$  (соответственно,  $\eta = \operatorname{const}$ ) в прямоугольных координатах являются эллипсами (соответственно, гиперболами), то проекция  $N$  на плоскость  $\varphi = 0$  на рис. 4.8 есть область, заполненная точками. Разумеется, ее следует представлять трехмерной — полученной в результате вращения плоского сечения вокруг оси  $x$ .

$E > 0$  траектории, уходящие на бесконечность (4.3.17)

При  $E > 0$  векторное поле, порожденное  $H_\xi$ , не полно; а при  $s$ , равном

$$s_\infty = \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{K - (p_\varphi^2 / \operatorname{sh}^2 \xi) + \alpha \operatorname{ch} \xi + 2E \operatorname{ch}^2 \xi}} < \infty,$$

траектории уходят на бесконечность (см. рис. 4.4 и формулу (4.3.7) с  $H_\xi = K$ ).

<sup>15</sup>На рис. 4.5 и 4.7 это сечение горизонтальными прямыми на высоте  $K$  (соответственно  $E - K$ ).

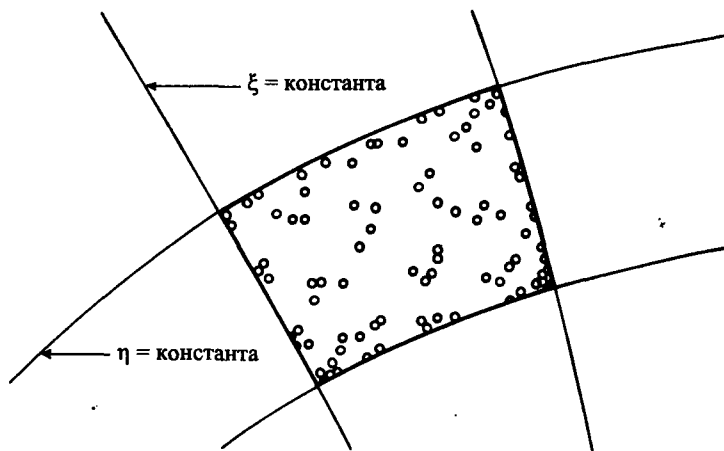


Рис. 4.8. Результат вычисления на компьютере точек, в которых траектория проходит сквозь плоскость  $\varphi = 0$ . Они всюду плотно заполняют проекцию инвариантного тора на эту плоскость

#### Примечания (4.3.18)

1. В зависимости от того, какое из неравенств  $p_\xi > 0$  или  $p_\xi < 0$  выполняется при  $s = 0$ , интеграл в (4.3.17) берется либо непосредственно от  $\xi_0$  до  $\infty$ , либо с повторным возвратом к точке поворота. В противном случае, на поверхности  $H = E$ ,  $H_\xi = K$ ,  $p_\varphi = \text{const}$  величина  $s_\infty$  зависит только от  $\xi_0$ .
2. Это не означает, что частицы уходят на бесконечность за конечное время. Так как  $dt/ds = 2(\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)$ , то  $t$  при  $s$  равном  $s_\infty$  также обращается в бесконечность, причем как  $(s_\infty - s)^{-1}$  (см. задачу (4.3.22,5)).

Уже в задаче Кеплера свободная эволюция во времени не подходила в качестве асимптотического базиса сравнения для траекторий, уходящих на бесконечность, поэтому и в случае задачи с двумя центрами на свободную эволюцию нет никаких надежд. Наоборот, следует ожидать, что на большом удалении от центров, расстояние между ними становится неразличимым и к  $\Phi_t^0$  можно применить задачу с одним центром.

#### Преобразование Мёллера (4.3.19)

Существуют преобразования Мёллера

$$\Omega_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi_{-t} \circ \Phi_t^0,$$

причем  $\Phi^0$  соответствует потоку с  $\alpha'_1 = 0$ ,  $\alpha'_2 = \alpha_1 + \alpha_2$  (кроме того,  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \alpha)$ ). Эти преобразования определены в области

$$D_\pm = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{p}) : \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} - \frac{\alpha}{r_2} > 0, (y, z) \neq 0, yp_z - zp_y \neq 0 \right\}.$$

#### Примечания (4.3.20)

1. Поток  $\Phi_t^0$  произволен, поскольку один центр можно поместить где угодно.  $\Omega_\pm$  существует, если его интенсивность равна  $\alpha$ .

2. Из (3.4.5) следует

$$\mathcal{R}_{\pm} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{p}) : \frac{|\mathbf{p}|^2}{2} - \frac{\alpha_1}{r_1} - \frac{\alpha_2}{r_2} > 0, (y, z) \neq 0, yp_z - zp_y \neq 0 \right\}.$$

Хотя доказательство (4.3.19) в принципе не трудно, однако оно требует кое-каких вычислений, поэтому приводить его здесь не будем.

### Следствия (4.3.21)

1.  $\Omega_{\pm}$  отображают поток  $\Phi_t^0|_{D_{\pm}}$  на  $\Phi_t|_{\mathcal{R}_{\pm}}$ . Так как  $\Omega_{\pm}$  — диффеоморфизмы, то  $\Phi_t$  имеет на  $\mathcal{R}_{\pm}$  ровно пять независимых постоянных движения — так же, как  $\Phi_t^0$  на  $D_{\pm}$ . Из (3.4.5, 3) и (4.2.4) следует, что

$$\tau_{\pm}(\mathbf{L}) = \mathbf{L} \circ \Omega_{\pm}^{-1} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{L}(t), \quad \tau_{\pm}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \circ \Omega_{\pm}^{-1} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{F}(t),$$

причем  $\tau_{\pm}(\mathbf{L}) \cdot \tau_{\pm}(\mathbf{F}) = 0$ .

2.  $\Omega_{\pm}(\beta)$  непрерывно зависят от  $\beta$  и  $\Omega_{\pm}(0) = \mathbf{1}$ . Преобразованиями  $\Omega_{\pm}^{-1}(\beta)$  траектории с  $E > 0$  потока  $\Phi_t$  диффеотопно (см. 2.6.15, 5) отображаются на траектории потока  $\Phi_t^0$ . Так как одни траектории получаются из других с помощью непрерывной деформации, то траектории не могут пересекаться и образовывать узлы. Преобразование Мёллера позволяет высказывать относительно траекторий утверждения, которые при другом подходе было бы трудно даже сформулировать.

Резюмируя, можем сказать об изменении потоков при разделении двух центров следующее: траектории, уходящие на бесконечность ( $E > 0$ ), деформируются лишь настолько, что поток может быть преобразован в линейный. Периодические траектории перепутываются в клубок, и большинство их всюду плотно заполняет трехмерную область.

### Задачи (4.3.22)

1. Выведите (4.3.6) с помощью вычислений из  $T^*(\Psi)$ .
2. Выведите (4.3.6) с помощью введения эллиптических координат в  $L = |\mathbf{x}|^2/2 - V$ .
3. Проверьте с помощью уравнений движения, что  $dH_{\xi}/dt = 0$ .
4. Разделите переменные в задаче с двумя центрами с помощью уравнения Гамильтона — Якоби (3.2.16).
5. Докажите, что для  $E > 0$  время  $t$  обращается в бесконечность как  $\frac{1}{2E(s_{\infty} - s)}$ .

### Решения (4.3.23)

1. Примем во внимание, что

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 \xi \begin{pmatrix} \cos^2 \eta \\ \sin^2 \eta \end{pmatrix} + \operatorname{sh}^2 \xi \begin{pmatrix} \sin^2 \eta \\ \cos^2 \eta \end{pmatrix} &= \operatorname{ch}^2 \xi - \begin{pmatrix} \sin^2 \eta \\ \cos^2 \eta \end{pmatrix} : \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(r_1 + r_2) &= \operatorname{ch} \xi, \quad \frac{1}{2}(r_1 - r_2) = \cos \eta \Rightarrow r_1 \cdot r_2 = \operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta. \end{aligned}$$

Это позволяет учесть потенциальную энергию. Для кинетической энергии вычисляем

$$\begin{aligned} T(\Psi)^t \cdot T(\Psi) &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\mathbf{p}|^2 &= (p_{\xi}, p_{\eta}, p_{\varphi})(T(\Psi)^{-1} \cdot T(\Psi)^{-1t}) \begin{pmatrix} p_{\xi} \\ p_{\eta} \\ p_{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{p_{\xi}^2 + p_{\eta}^2}{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta} + \frac{p_{\varphi}^2}{\operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta}. \end{aligned}$$

$$2. \quad |\dot{\mathbf{x}}|^2 = (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)(\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) + \dot{\varphi}^2 \text{sh}^2 \xi \sin^2 \eta \Rightarrow \\ \Rightarrow (p_\xi, p_\eta, p_\varphi) = (\dot{\xi}(\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta), \dot{\eta}(\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta), \dot{\varphi} \text{sh}^2 \xi \sin^2 \eta).$$

$$3. \quad \frac{dH_\xi}{dt} = -2p_\xi H_{,\xi} - \frac{p_\xi}{\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta} \left[ \frac{p_\varphi^2 2\text{ch} \xi}{\text{sh}^3 \xi} + \alpha \text{sh} \xi + 2H \text{sh} \xi \text{ch} \xi \right] = 0.$$

4. Положим  $f = S - Et$ . Тогда уравнение

$$\left( \frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 (\text{sh}^{-2} \xi + \sin^{-2} \eta) - \alpha \text{ch} \xi - \beta \cos \eta - E(\text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) = 0,$$

может быть решено с помощью разделения переменных

$$S = S_1(\xi) + S_2(\eta) + \varphi p_\varphi.$$

5. Асимптотически получаем

$$\frac{d\xi}{ds} = e^\xi \sqrt{2E} \Rightarrow s = s_\infty - \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{2E}}, \quad t = 2 \int ds \frac{e^{2\xi}}{4} = \frac{1}{2E(s_\infty - s)}.$$

#### 4.4. Ограниченная задача трех тел

*Движение частицы в поле двух вращающихся масс даже в плоском случае настолько сложно, что относительно него удастся высказать лишь отдельные весьма отрывочные утверждения.*

Как упоминалось выше, речь идет о движении частицы, настолько легкой, что ее воздействием на движение двух других частиц можно пренебречь. Например, такое приближение вполне обосновано в задаче о полете искусственного спутника к Луне. Однако теперь нам необходимо учесть движение центров (массы  $(m, \mu)$ , координаты  $(\mathbf{x}_m(t), \mathbf{x}_\mu(t))$ ), что приводит к зависящей от времени функции Гамильтона.

**Функция Гамильтона (4.4.1)**

$$H = \frac{1}{2} |\mathbf{p}|^2 - \kappa \left( \frac{m}{|\mathbf{x}_m(t) - \mathbf{x}|} + \frac{\mu}{|\mathbf{x}_\mu(t) - \mathbf{x}|} \right).$$

**Примечания (4.4.2)**

1. Рассматриваем только случай, когда тяжелые частицы движутся по круговой траектории. Тогда  $\mathbf{x}_m$  и  $\mathbf{x}_\mu$  описывают окружность вокруг общего центра масс, который находится в начале координат.
2. Если  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{x}$  в какой-то момент времени находятся в плоскости траектории другой частицы, то они всегда остаются в той же плоскости. Будем заниматься главным образом этим плоским вариантом задачи.
3. В (4.4.1) мы положили массу легкой частицы равной единице, так как ее можно было исключить из уравнений движения. В дальнейшем выберем для простоты такие единицы, в которых расстояние между тяжелыми частицами  $\equiv R = \kappa = m + \mu = 1$ . Тогда частота тяжелых частиц

$$\omega = \sqrt{\kappa(m + \mu)} / R^{3/2}$$

оказывается равной единице, и остается только один существенный параметр  $\mu/m \leq 1$ . Массы  $m$  и  $\mu$  находятся от начала координат соответственно на расстояниях  $\mu$  и  $m$ .

### Вращающиеся координаты (4.4.3)

В системе координат, вращающейся вместе с тяжелыми частицами, центры покоятся. Как видно из (3.2.15,2), в этой системе координат к  $H$  необходимо добавить центробежный член. Таким образом, в плоском случае получаем в покомпонентной записи

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - xp_y + yp_x - \frac{m}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{\mu}{[(x - m)^2 + y^2]^{1/2}}, \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x + y, & \dot{y} &= p_y - x, & \dot{p}_x &= p_y - V_{,x}, & \dot{p}_y &= -p_x - V_{,y}, \\ V_{,x} &= \frac{m(x + \mu)}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{\mu(x - m)}{[(x - m)^2 + y^2]^{3/2}}, & V_{,y} &= \frac{ym}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{y\mu}{[(x - m)^2 + y^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

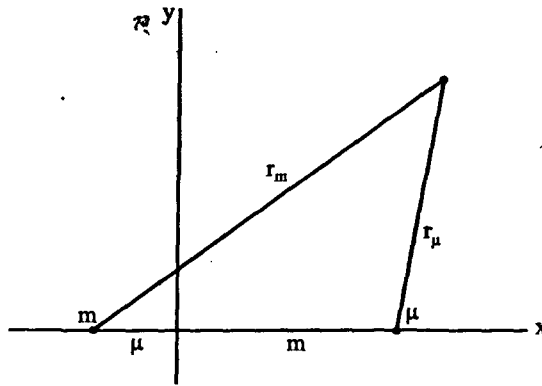


Рис. 4.9. Координаты в ограниченной задаче трех тел

### Примечания (4.4.5)

1. Переход к вращающимся координатам есть точечное преобразование в расширенном конфигурационном пространстве, но мы можем теперь применять  $H$  и в фазовом пространстве  $T^*(\mathbb{R}^2 \setminus (m, 0) \setminus (-\mu, 0))$ .
2. Так как во вращающейся системе координат функция Гамильтона  $H$  не зависит явно от времени, то она является постоянной движения (постоянной Якоби). Однако других постоянных движения, которые сделали бы систему интегрируемой, не обнаружено.
3. Чтобы функция Гамильтона  $H$  порождала полное векторное поле и тем самым позволяла избежать столкновений, фазовое пространство необходимо еще больше ограничить, но пока не ясно, как это сделать.

### Положения равновесия (4.4.6)

**Указание** гравитационная сила обращается в нуль только в одной точке, однако во вращающейся системе координат ее в некоторых точках удастся компенсировать центробежной силой. Таким образом, в фазовом пространстве теперь существуют критические точки с  $dH = 0$ , в которых, как следует из (4.4.4),

$$\begin{aligned} p_x &= -y, & x &= (x + \mu)m r_m^{-3} + \mu(x - m)r_\mu^{-3}, \\ p_y &= x, & y &= y m r_m^{-3} + y \mu r_\mu^{-3}, \\ r_m^2 &= (x + \mu)^2 + y^2, & r_\mu^2 &= (x - m)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют следующие решения:

а) **Два равносторонних решения.**

Если  $y \neq 0$ , то уравнение для  $y$  гласит:  $1 = m r_m^{-3} + \mu r_\mu^{-3}$ , и для  $x$  получаем  $m \mu (r_m^{-3} - r_\mu^{-3}) = 0$ , откуда  $r_\mu = r_m$ . Так как  $m + \mu = 1$ , то равенство  $r_m = r_\mu = 1$  справедливо независимо от  $m/\mu$ . Следовательно, обе точки, в которых три тела образуют равносторонний треугольник, являются положениями равновесия и лагранжевым решением.

б) **Три коллинеарных решения.**

Если  $y = 0$ , то, как нетрудно видеть, существуют три решения, поскольку кривые  $f = x$  и  $f = m \frac{x + \mu}{|x + \mu|^3} + \mu \frac{x - m}{|x - m|^3}$  имеют три точки пересечения (рис. 4.10).

**Примечания (4.4.7)**

1. Положения равновесия являются нульмерными траекториями. В исходной системе им соответствуют кривые траектории с единичной частотой.

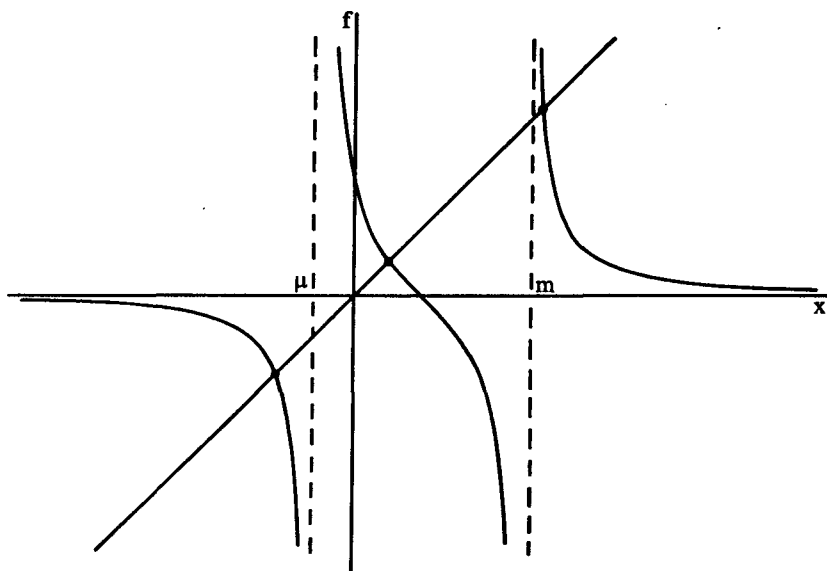


Рис. 4.10. Определение коллинеарных решений

2. Равносторонние решения были известны еще Лагранжу, но он не смог выяснить, представляют ли они какой-нибудь интерес для астрономии. Однако выяснилось, что такие решения приблизительно реализуются в Солнечной системе: существует группа астероидов (так называемые **трояницы**), которая образует вместе с Солнцем и Юпитером равносторонний треугольник. Поскольку масса троянцев исчезающе мала по сравнению с массами Солнца и Юпитера, а все небесные тела в Солнечной системе движутся практически в одной плоскости, то система уравнений (4.4.4) применима к ним.
3. Коллинеарные решения, по-видимому, не реализуются, что связано с их неустойчивостью. Другие большие планеты оказывают определенное влияние на движение астероидов, и необходимо исследовать, что происходит с траекториями астероидов: некоторая деформация или полное разрушение. Ниже будет показано, что коллинеарные решения всегда неустойчивы, тогда как равносторонние решения устойчивы, если масса Юпитера составляет менее 4 % массы Солнца (в действительности это имеет место).



**Периодические траектории (4.4.8)**

Возникает вопрос, не существуют ли другие периодические решения помимо пяти названных. Мы уже знаем, что в частном случае  $\mu = 0$  задача допускает весьма много периодических траекторий (во вращающейся системе координат это кеплеровские траектории одного центра и массы  $m$  с рациональной циклической частотой). Как показывают следующие рассуждения, восходящие к Пуанкаре, при определенных условиях периодические решения с теми же частотами существуют и при достаточной малой массе  $\mu$ . Пусть  $u(t, u_0; \mu)$  (здесь  $u$  означает  $(x, y, p_x, p_y)$ ) — решение дифференциального уравнения, где  $u(0, u_0; \mu) = u_0$  — начальное условие и  $\tau$  — период. Требуется найти такое начальное значение  $u_0$ , при котором траектория имеет период  $\tau$ . Иначе говоря, должно выполняться соотношение

$$u(\tau, u_0; \mu) = u_0, \quad (4.4.9)$$

которое можно рассматривать как уравнение для определения  $u_0(\mu)$ . В случае кеплеровской задачи, как известно, при рациональных  $\tau$  это уравнение имеет решение при  $\mu = 0$ . Из общей теории дифференциальных уравнений [1, 10, 7] мы знаем, что решение  $u$  дифференцируемо по  $\mu$  и  $u_0$ , и притом в областях, в которых траектории не попадают в центры. Если  $(u, u_0, \mu)$  удовлетворяет условию

$$\det \left( \frac{\partial(u - u_0)}{\partial u_0} \right) \neq 0, \quad (4.4.10)$$

то этот детерминант остается отличным от нуля в некоторой окрестности нуля. Тогда (2.1.10.3) гарантирует существование пятимерного подмногообразия  $(u, u_0, \mu)$ , соответствующего решению  $u_0(\mu)$  в окрестности точки  $\mu = 0$ . Это означает, что при достаточно малой массе  $\mu$  для каждой рациональной частоты существует периодическая траектория.

**Примечания (4.4.11)**

1. Последнее утверждение нетривиально потому, что периодичность может быть нарушена сколь угодно малыми возмущениями и, кроме того, в окрестности центра любая масса  $\mu = 0$  может привести к сколь угодно большим изменениям силы (см. задачу (4.4.24,1)).
2. Не известно, сколь велика окрестность точки  $\mu = 0$ .
3. Если существует постоянная движения  $K$  (что всегда имеет место в гамильтоновых системах), то условие (4.4.10) заведомо нарушается:

$$K(u(\tau, u_0)) = K(u_0) \quad \forall u_0 \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial u}(u(\tau, u_0)) \frac{\partial u(\tau, u_0)}{\partial u_0} = \frac{\partial K(u_0)}{\partial u_0}.$$

Это означает, что вектор

$$\frac{\partial K(u_0)}{\partial u_0} = \frac{\partial K(u(\tau, u_0))}{\partial u}$$

есть собственный вектор транспонированной матрицы  $\partial(u(\tau, u_0) - u_0)/\partial u_0$ , соответствующий нулевому собственному значению, поэтому детерминант этой матрицы также должен быть равен нулю. Однако эту трудность можно устранить, так как вследствие существования постоянной движения одно из четырех уравнений (4.4.9) выполняется автоматически, если выполняются остальные три.

**Пример (4.4.12)**

Рассмотрим круговые траектории невозмущенной задачи  $\mu = 0$ ,  $m = 1$ . В полярных координатах на плоскости функция Гамильтона представима в виде

$$H = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - p_\varphi - \frac{1}{r},$$

и уравнения движения можно записать следующим образом:

$$(\dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{p}_r, \dot{p}_\varphi) = \left( p_r, \frac{p_\varphi}{r^2} - 1, -\frac{1}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^3}, 0 \right).$$

Круговая траектория соответствует решению

$$u := (r, \varphi, p_r, p_\varphi) = ((\omega + 1)^{-2/3}, \omega t, 0, (\omega + 1)^{-1/3}).$$

Для произвольных решений матрица производных  $\partial u / \partial u_0$  определяется дифференциальными уравнениями, следующими из уравнений движения. Полагая  $\gamma = (\omega + 1)^{1/3}$ ,  $\tau = 2\pi/\omega$ , вычисляем (см. задачу (4.4.24,2))

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial u}{\partial u_0} \right|_{t=\tau, u_0=(\gamma^{-2}, 0, 0, \gamma^{-1})} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \tau \gamma^3 & 0 & \frac{1}{\gamma^3} \sin \tau \gamma^3 & \frac{2}{\gamma} (1 - \cos \tau \gamma^3) \\ -2\gamma^2 \sin \tau \gamma^3 & 1 & -\frac{2}{\gamma} (1 - \cos \tau \gamma^3) & -3\gamma^4 \tau + 4\gamma \sin \tau \gamma^3 \\ -\gamma^3 \sin \tau \gamma^3 & 0 & \cos \tau \gamma^3 & 2\gamma^2 \sin \tau \gamma^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

матрица  $\frac{\partial u}{\partial u_0} - 1$ , согласно (4.4.11,3), имеет детерминант, равный нулю, так как

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{u_0} = \left( \frac{1}{r^2} - \frac{p_\varphi^2}{r^3}, 0, p_r, \frac{p_\varphi}{r^2} - 1 \right) = (0, 0, 0, \omega),$$

где  $(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = u_0 = (\gamma^{-2}, 0, 0, \gamma^{-1})$  и  $(0, 0, 0, 1)$  — собственный вектор матрицы  $(\partial u / \partial u_0)|_t$ , соответствующий единичному собственному значению. Сосредоточим теперь внимание на  $r$ - и  $p_r$ -компонентах решения  $u$  и рассмотрим

$$\begin{aligned} u_r(\tau; r, 0, p_r, p_\varphi; \mu) - r &= 0, \\ u_\varphi(\tau; r, 0, p_r, p_\varphi; \mu) - 2\pi &= 0, \\ u_{p_r}(\tau; r, 0, p_r, p_\varphi; \mu) - p_r &= 0, \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

и уравнения для начальных значений  $(r, p_r, p_\varphi)$ . Соответствующий якобиан, как показывают вычисления (см. задачу (4.4.24,3)), равен

$$24\pi \frac{(\omega + 1)^{4/3}}{\omega} \sin^2 \frac{\pi}{\omega}$$

не обращается в нуль, если  $1/\omega \notin \mathbb{Z}$ . По предположению частота  $\omega$  рациональна ( $\omega = p/q$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ ) и при  $p \neq 1$  это условие выполняется. Нетрудно доказать (см. задачу (4.4.24,4)), что трех уравнений (4.4.13) достаточно, чтобы  $u_{p_\varphi}(\tau)$  и при  $\mu \neq 0$  возвращалось в исходную точку. Таким образом, если частота  $\omega$  не находится в резонансе с вращающимися центрами, т.е. если  $1/\omega \notin \mathbb{Z}$ , то при этой частоте периодические траектории существуют и при конечном



снова становится параметром возмущения, при  $\mu = 0$  система интегрируема). Она дает инвариантные двумерные торы возмущенной системы. На трехмерной поверхности  $H = \text{const}$  те траектории, которые располагаются на двухмерных инвариантных торах, никогда их не покидают, и сколь скоро выполнены некоторые условия на частоты, то устойчивость системы может быть доказана [6, § 34].

3. Прекрасную реализацию плоской ограниченной задачи трех тел обнаруживаем в астероидах между Марсом и Юпитером (Солнце и Юпитер выступают в роли двух тяжелых тел). По теореме КАМ особенно сильное возмущение претерпевают те орбиты, частоты которых  $\omega$  рационально связаны с частотой Юпитера  $\omega_{\text{ЮП}}$ :

$$\omega/\omega_{\text{ЮП}} = p/q, \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, в распределении астероидов наблюдаются некоторые провалы (рис. 4.11). Их можно объяснить следующим образом. Соответствующие траектории деформируются настолько, что траектории астероидов пересекаются с траекториями других планет, и те захватывают астероиды.

### Траектории, уходящие на бесконечность (4.4.19)

В рассмотренных примерах частицы с большей энергией уходили на бесконечность, и этого можно ожидать, исходя из интуитивных соображений, так как на больших расстояниях потенциал стремится к  $1/r$ . Эти соображения подкрепляются еще более, если функцию Гамильтона вращающейся системы записать в виде

$$H = \frac{1}{2}[(p_x + y)^2 + (p_y - x)^2] + \Omega, \quad (4.4.20)$$

$$\Omega = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{m}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{\mu}{[(x - m)^2 + y^2]^{1/2}}.$$

### Примечания (4.4.21)

1. Движение происходит не так, как в потенциале  $\Omega$ , хотя при  $H = E$  оно ограничено в фазовом пространстве областью  $\Omega \leq E$ .
2.  $\Delta\Omega = -2$  в  $\mathbb{R}^2 \setminus (\{m, 0\} \cup \{-\mu, 0\})$ , поэтому критические точки потенциала  $\Omega$  — только максимумы или седловые точки, которые находятся в пяти положениях равновесия (4.4.6).

Область  $\Omega \leq E$  при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных  $E$  состоит из трех не связанных между собой компонент: двух окрестностей центров и окрестности бесконечности (рис. 4.12). Частица, начинающая двигаться из достаточно далекой точки с большим угловым моментом, отделена от центров барьером и поэтому должна снова уйти на бесконечность. Напомним, что: ( $H$  во вращающейся системе) = ( $H$  в покоящейся системе) — (угловой момент). Следовательно,  $E \ll 0$  может быть отрицательно, либо когда частица находится вблизи центра, либо когда она обладает большим угловым моментом. Именно последний случай реализуется в окрестности бесконечности, где находятся неограниченные траектории.

Для доказательства с помощью вычислений, что из основной части фазового пространства частицы уходят на бесконечность, необходимо произвести некоторые оценки.

- а) *Ограничение внешней области*: например, при  $r \geq 2$

$$\Omega \geq -\frac{r^2}{2} - \frac{m}{r+1-m} - \frac{1-m}{r-m} = \frac{r^2}{2} - \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{m(1-m)}{(r-m)(r+1-m)} \right) \quad \text{при } m > \mu;$$

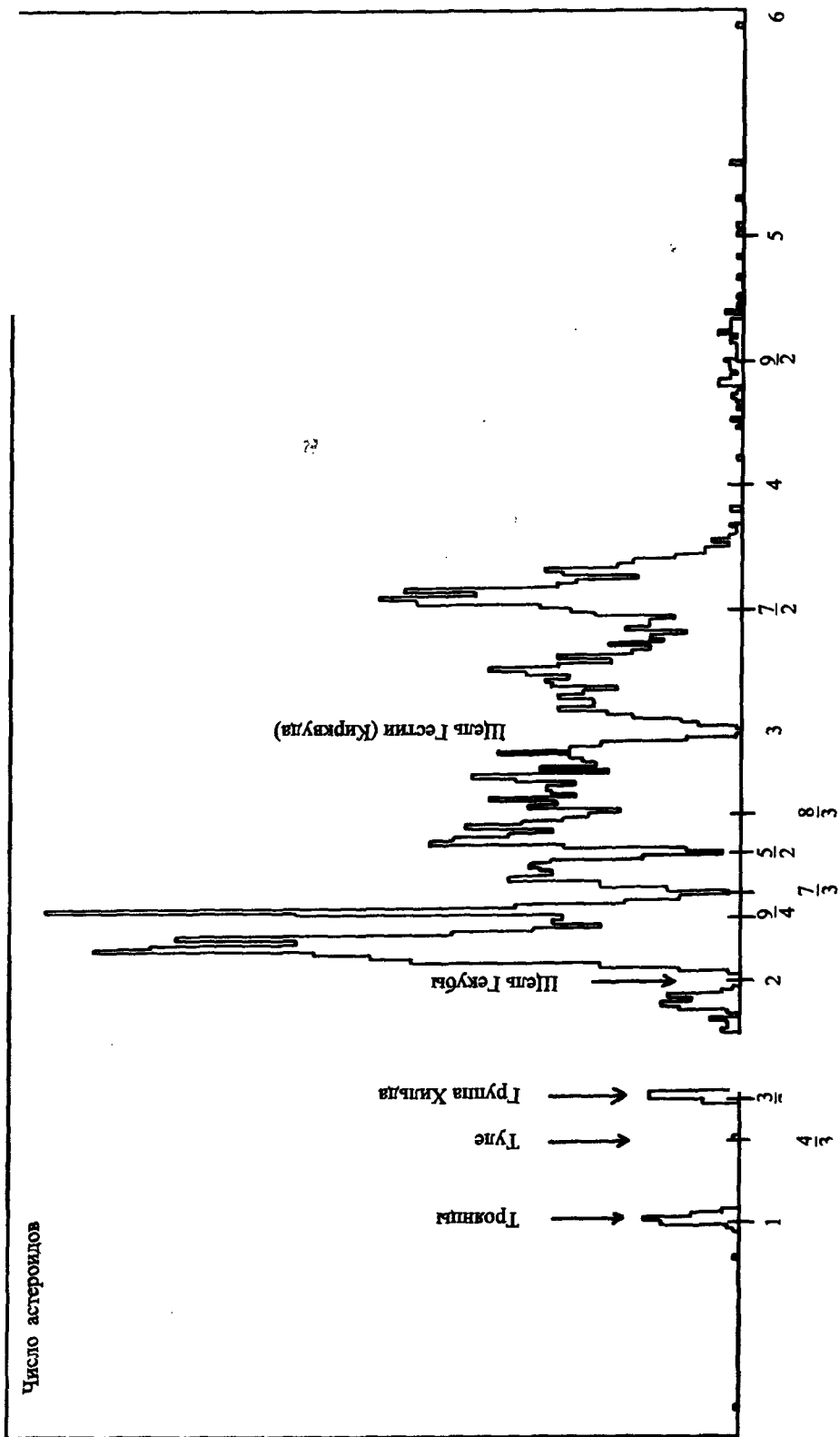


Рис. 4.11. Распределение астероидов

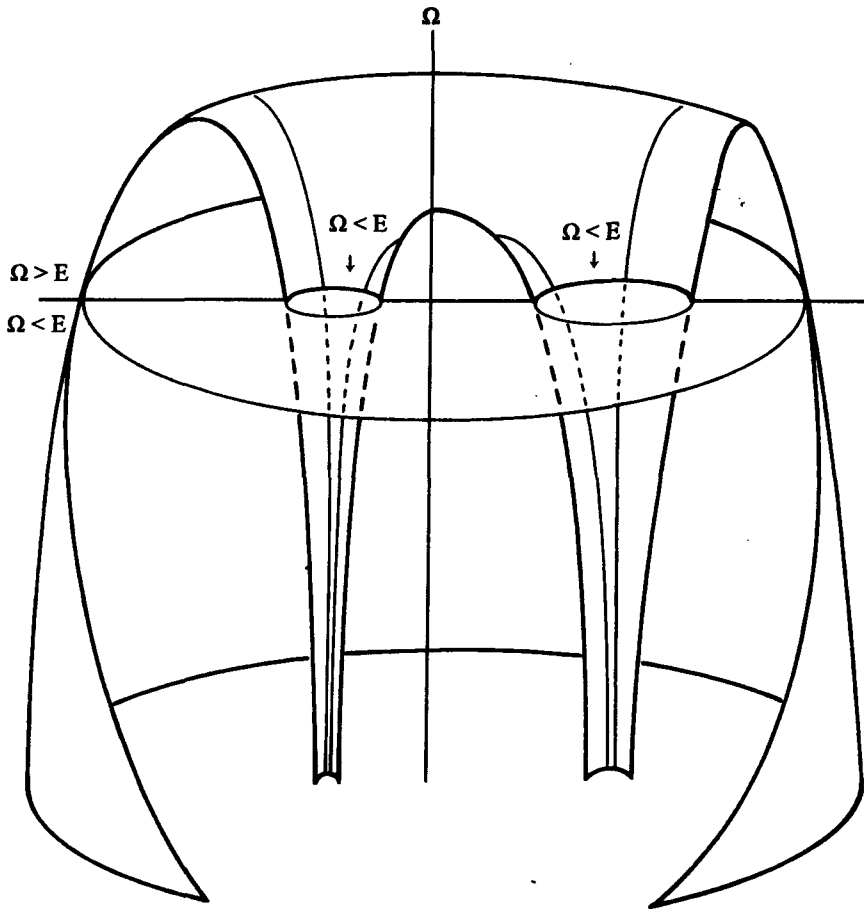


Рис. 4.12. Сечение частей поверхности  $\Omega(x, y)$  (напоминающей вулкан с двумя кратерами) горизонтальной плоскостью

где 
$$\frac{m(1-m)}{(r-m)(r+1-m)} < \frac{1}{8} \quad \forall m, \text{ таких что } \frac{1}{2} \leq m \leq 1.$$

Таким образом,

$$\Omega(x, \sqrt{r^2 - x^2}) \geq -\frac{r^2}{2} - \frac{9}{8r}.$$

Кривая  $r^3 - 2|E|r + 9/4 = 0$  имеет минимум при  $r = \sqrt{2E/3}$ , и этот минимум отрицателен при  $|E|^{3/2} \frac{4}{3} \sqrt{2/3} \geq 9/4$ . Но поскольку разность  $E - \Omega$  должна быть неотрицательна, то  $r$  не может убывать до минимума и ограничен областью

$$r > \sqrt{\frac{2}{3} |\Omega|} \geq \sqrt{\frac{2}{3} |E|}.$$

Следовательно, при  $E < -6$  получаем  $r(t) > 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

- б) *Ограничение углового момента.* Так как угловой момент  $L$  сохраняется при потенциале  $1/r$ , то для траекторий на больших расстояниях он может изменяться лишь в

очень узких пределах. Из уравнений движения следует (см. задачу (4.4.24,6)), что при  $r(t') > 2$ ,  $0 \leq t' \leq t$  и  $L := xp_y - yp_x$  выполняется неравенство

$$|L(t) - L(0)| \leq \int_0^t \frac{dt'}{4I(t')}, \quad I := \frac{r^2}{2}.$$

в) *Выпуклость моментов инерции.* Для свободных частиц  $I(t)$  есть квадратичная функция, а при определенных условиях можно показать, что  $I(t)$  — по крайней мере выпуклая функция. Нетрудно убедиться (см. задачу (4.4.24,7)), что

$$\ddot{I}(t) \geq H + L(0) - \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{4I(t')} - \frac{1}{4I(t)}.$$

Располагая такой информацией, можем указать те области фазового пространства, в которых  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} I(t) = \infty$ . Если известно, что  $\ddot{I}(t) \geq 2B^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , то можно рассуждать следующим образом. Поскольку строго выпуклая функция  $I(t)$  достигает минимум при некотором  $t_0 \in \mathbb{R}$ , и

$$I(t) \geq B^2(t - t_0)^2 + I_{\min} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

а в силу ограничения (4.4.21,а)  $I_{\min} > |E|/3$ . Следовательно,

$$\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{I(t)} \leq \frac{\pi}{4B\sqrt{I_{\min}}} \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{4B\sqrt{|E|}}$$

и из ограничения (4.4.21,в) заключаем, что

$$\ddot{I}(t) \geq E + L(0) - \frac{\pi\sqrt{3}}{4B\sqrt{|E|}} - \frac{3}{4|E|}.$$

Остается выяснить, когда выполняется предположение  $\ddot{I} \geq 2B^2$ . Если

$$B^2 := \frac{(E + L(0) - 3/4|E|)}{6} \geq \pi^{2/3} 3^{1/3} |E|^{-1/3} 2^{-8/3},$$

то в силу последнего ограничения

$$\ddot{I} \geq 6B^2 - \frac{\pi\sqrt{3}}{4B\sqrt{|E|}} \geq 2B^2,$$

тогда  $2B^2 + \alpha/B \leq 6B^2 \quad \forall B^2 \geq (\alpha/4)^{2/3}$ . Следовательно, если выбрать

$$L(0) \geq |E| + \frac{3}{4|E|} + \frac{\pi^{2/3} 3^{4/3}}{2^{5/3} |E|^{1/3}},$$

то вторая производная  $\ddot{I}(t)$  всегда ограничена снизу величиной  $\pi^{2/3} 3^{1/3} |E|^{-1/3} 2^{-5/3}$ , и наши рассуждения остаются в силе. При  $t \rightarrow \pm\infty$  момент инерции  $I(t)$  неограниченно возрастает, и получаем следующий критерий.

**Критерий ухода на бесконечность (4.4.22)**

Если для некоторой траектории с  $E < -6$ , выполняется неравенство

$$L(0) \geq |E| + \frac{3}{4|E|} + \frac{\pi^{2/3} 3^{4/3}}{2^{5/3} |E|^{1/3}}$$

тогда  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) = \infty$ .

**Примечания (4.4.23)**

1. Так как мы сосредоточили внимание на предположении, что  $\ddot{I} \geq 2B^2$ , то может создаться впечатление, будто наши рассуждения содержат порочный круг. Следует иметь в виду, однако, что если признак убегания траекторий на бесконечность выполнен, то производная  $\dot{I}$  на каждом конечном интервале времени остается не меньше  $2B^2$ , и наши рассуждения сохраняют свою доказательную силу. Это означает, что замкнутое множество  $\{t \geq 0, \dot{I} \geq 2B^2\}$  не может быть множеством вида  $[0, c]$  с  $c < \infty$ , так как возможность равенства  $\ddot{I}(c) = 2B^2$  исключена.
2. Аналогично случаю двух центров, преобразование Мёллера относительно потока, порождаемого потенциалом  $1/r$ , существует как  $\Phi_t^0$ . В этой части фазового пространства имеем три постоянных движения (пять в случае трехмерного пространства), и траектории гомотопны кеплеровским гиперболам.
3. Траектории, попадающие в окрестность центров, могут становиться сколь угодно сложными. Например, следующее удивительное утверждение можно высказать относительно траекторий, ортогональных плоскости движения тяжелых частиц, если те движутся по эллипсам [14, III.5]:  $\exists m > 0$  такое, что для любой последовательности  $s_k > m$  существует траектория, для которой интервал времени между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м пересечениями с плоскостью эллипсов в точности равен  $s_k$ .
4. В ситуации, изображенной на рис. 4.10, любая траектория в окрестности одного из центров всегда должна оставаться поблизости от него. Можно было бы попытаться воспользоваться теоремой о возвращении (2.6.11), но она в данном случае неприменима из-за невозможности избежать столкновений и найти в фазовом пространстве инвариантную по времени область, которая была бы компактной как в импульсных, так и в пространственных координатах.

Хотя поток  $\Phi_t$  в ограниченной задаче трех тел известен не во всех подробностях, однако складывается следующее впечатление, что поведение траекторий вдали от центра протекает спокойно. Но, неприятности (резкое усложнение характера траекторий) начинаются, когда частица приближается к центру.

**Задачи (4.4.24)**

1. В случае двумерного гармонического осциллятора можно показать, что периодические траектории с  $\mu = 0$  перестают существовать для

$$H(\mu) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2 + \mu(x^2 - y^2))$$

со сколь угодно малой массой  $\mu \neq 0$ . Почему в этом случае не проходят рассуждения Пуанкаре?

2. Вычислите  $\partial u / \partial u_0$  из (4.4.12).
3. То же для системы (4.4.13). Чему равен детерминант матрицы  $\partial u / \partial u_0$  в этом случае?
4. Докажите, что  $u_{p_\varphi}$  в (4.4.12) действительно равно  $p_\varphi$ .



5. Вычислите собственные значения матрицы  $A$  из (4.4.16) для равновесных конфигураций, образующих равносторонний треугольник.
6. Пусть

$$p_\varphi := xp_y - yp_x, \quad I = r^2/2.$$

Выведите из (4.4.4) ограничение на угловой момент через момент инерции

$$|p_\varphi(0) - p_\varphi(t)| \leq \int_0^t \frac{dt'}{4I(t')}, \quad \text{при условии, что } I(t') > 2 \quad \forall 0 \leq t' \leq t.$$

7. Воспользуйтесь задачей (4.4.24,6), чтобы доказать неравенство

$$\dot{I}(t) \geq H + L(0) - \int_0^t dt' \frac{1}{4I(t')} - \frac{1}{4I(t)}, \quad \text{где } I(t') > 2 \quad \forall 0 \leq t' \leq t.$$

### Решения (4.4.25)

1. В полярных координатах  $H(0) = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + r^2 \right)$ . Полагая  $u = (r, \varphi, p_r, p_\varphi)$  и используя решение  $u(r; r, 0, 0, r^2) =: u_0$ , вычисляем

$$A = \left. \frac{\partial X_H}{\partial u} \right|_{u=u_0} = \begin{array}{|cccc|} \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -2/r & 0 & 0 & 1/r^2 \\ \hline -4 & 0 & 0 & 2/r \\ \hline \end{array}$$

Справедливо векторное равенство  $A \cdot (a, b, c, d) = (c, -2a/r + d/r^2, -4a + 2d/r, 0)$ , поэтому ранг матрицы  $A$  равен размерности  $(A \cdot \mathbb{R}^4) = 2$ , в силу чего ранг матрицы  $e^{tA} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (tA)^n/n!$  также равен двум, и из  $\partial(u - u_0)/\partial u_0$  нельзя выделить невырожденную подматрицу размерности  $(3 \times 3)$ . Поэтому система уравнений неразрешима.

2. Так как  $\dot{u}(t, u_0) = X_H(u(t, u_0))$ , то матрица производных  $\partial u/\partial u_0$  удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial u}{\partial u_0} = \frac{\partial X_H}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u_0},$$

где  $\partial X_H/\partial u$  зависит от решения  $u(t, u_0)$ , которое предполагается известным. Для круговой траектории эта матрица не зависит от  $t$ , а так как из  $u(0, u_0) = u_0$  следует начальное условие  $\partial u/\partial u_0|_{t=0} = 1$ , то решение приведенного выше дифференциального уравнения есть просто

$$\frac{\partial u}{\partial u_0} = e^{t \partial X_H/\partial u}.$$

Таким образом, необходимо вычислить матрицу

$$\frac{\partial X_H(u(t, u_0))}{\partial u} =: A$$

( $u$  определяется круговой траекторией) и построить экспоненциальную функцию с этой матрицей. Из (4.4.12) получаем

$$X_H = \left( p_r, \frac{p_\varphi}{r^2} - 1, -\frac{1}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^3}, 0 \right), \quad \frac{\partial X_H}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2p_\varphi/r^3 & 0 & 0 & 1/r^2 \\ 2/r^3 - 3p_\varphi^2/r^4 & 0 & 0 & 2p_\varphi/r^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и для частного случая круговой траектории имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\gamma^5 & 0 & 0 & \gamma^4 \\ -\gamma^6 & 0 & 0 & 2\gamma^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления экспоненты  $e^{\tau A}$  приведем матрицу  $A$  с помощью невырожденной (но не обязательно унитарной, так как матрица  $A$  не эрмитова) матрицы  $C$  к жордановой нормальной форме

$$A = C N C^{-1}.$$

Здесь  $N$  — матрица, на главной диагонали которой стоят собственные значения матрицы  $A$ , непосредственно над ней — элементы, отличные от нуля, а все остальные элементы равны нулю. Экспоненциальная функция от такой матрицы строится легко, и  $e^{\tau A} = C e^{\tau N} C^{-1}$ . Собственные значения  $\lambda = 0, 0, \pm i(\omega + 1)$  матрицы  $A$  находим, решая характеристическое уравнение  $\det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda^2 + \gamma^3) = 0$ . Вычисляя в явном виде все матрицы, получаем

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2i\gamma^2 & -2i\gamma^2 \\ 0 & 0 & i\gamma^3 & -i\gamma^3 \\ 0 & \gamma/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2/\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/\gamma \\ 1/2 & 0 & 1/2i\gamma^3 & -1/\gamma \\ 1/2 & 0 & -1/2i\gamma^3 & -1/\gamma \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\gamma^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\gamma^3 \end{pmatrix}, \quad e^{\tau N} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma^5\tau & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\tau\gamma^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\tau\gamma^3} \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы совпадает с результатом, приведенным в (4.4.12).

### 3. Речь идет об определителе матрицы

$$\begin{pmatrix} u_{r,r} - 1 & u_{r,p_r} & u_{r,p_\varphi} \\ u_{\varphi,r} & u_{\varphi,p_r} & u_{\varphi,p_\varphi} \\ u_{p_r,r} & u_{p_r,p_r} - 1 & u_{p_r,p_\varphi} \end{pmatrix}.$$

Полагая  $S := \sin \tau\gamma^3$ ,  $C := \cos \tau\gamma^3$ , приводим эту матрицу при  $\mu = 0$  к виду

$$\begin{pmatrix} C - 1 & S/\gamma^3 & 2(1 - C)/\gamma \\ -2\gamma^2 S & -2(1 - C)/\gamma & -3\gamma^4\tau + 4\gamma S \\ -\gamma^3 S & C - 1 & 2\gamma^2 S \end{pmatrix}.$$

Вычисляя детерминант ( $\tau = 2\pi/\omega$ ,  $\gamma^3 = \omega + 1$ ), находим

$$24\pi \frac{(\omega + 1)^{4/3}}{\omega} \sin^2 \frac{\pi}{\omega}.$$

### 4. Известно, что $H(\tau, 2\pi, p_r, u_{p_\varphi}(\tau)) = H(\tau, 0, p_r, p_\varphi)$ , и при $\mu = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{r^3} - 1 = \omega \neq 0.$$

Поэтому  $\partial H/\partial p_\varphi$  в некоторой окрестности  $\mu = 0$  между  $p_\varphi$  и  $u_{p_\varphi}(\tau)$  имеет определенный знак. Но тогда должно выполняться равенство  $u_{p_\varphi}(\tau) = p_\varphi$ .

5. Для блочных матриц  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  умножение на  $\begin{pmatrix} d & 0 \\ -c & d \end{pmatrix}$  показывает, что

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det(ad - bc), \text{ если } dc = cd.$$

Следовательно,

$$\det(A - \lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{16}(1 - (1 - 2\mu)^2),$$

откуда получаем собственные значения матрицы A:

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}.$$

6. Вследствие несохранения углового момента находим ( $|\mathbf{L}|^2 \equiv L_z^2 \equiv L^2$ )

$$\begin{aligned} \dot{L} &= -xV_y + yV_x = m\mu y \left\{ [(x + \mu)^2 + y^2]^{-3/2} - [(x - m)^2 + y^2]^{-3/2} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\dot{L}| \leq \frac{m\mu}{(r - m)^2} \leq \frac{1}{2r^2} \quad \forall r \geq 2 \Rightarrow |\dot{L}| \leq \frac{1}{4I}, \quad \text{если } I \geq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad \dot{i} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) = p_x^2 + p_y^2 - xV_x - yV_y = H + L + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \\ &+ m\mu \left\{ \frac{x + \mu}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{x - m}{[(x - m)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}. \end{aligned}$$

Далее, как и в решении (4.4.25,6),

$$|\dot{i}| \leq \frac{1}{(r - m)^2} \leq \frac{1}{2r^2} \quad \text{и} \quad L(t) \geq L(0) - \int_0^t \frac{dt}{4I(t)}, \quad p_x^2 + p_y^2 \geq 0.$$

ижд.

## 4.5. Задача N тел

*Хотя система уравнений для задачи N тел кажется безнадежно сложной, удается не только найти ее точные решения, но и высказать некоторые общие утверждения.*

Многие выдающиеся математики с давних времен пытались испробовать свое искусство на уравнениях (1.1.1) и (1.1.2) с  $N \geq 3$ , но без особого успеха. Из их наследия мы выбрали несколько интересных фрагментов, чтобы продемонстрировать некоторые особенности задачи. При этом ограничиваемся случаем чистой гравитации. Включение кулоновской силы требует лишь незначительных изменений и не привносит ничего принципиально нового. Как обычно, начинаем с постоянных движения.

### Постоянные движения (4.5.1)

Как и в задаче двух тел, поток факторизуется на движение центра масс и относительное движение. Относительно движения центра масс располагаем максимальным числом постоянных движения (галилеева инвариантность), а в относительной части — только сохранением углового момента (вращательная инвариантность).

### Случай N = 3 (4.5.2)

Фазовое пространство 18-мерно, относительное движение 12-мерно. Угловой момент и энергия вместе дают четыре постоянных движения. Для интегрирования уравнений этого недостаточ-

## Примечания (4.5.3)

1. В то время как в ограниченной задаче трех тел можно доказать [14, VI,8], что кроме интеграла Якоби других дополнительных интегралов движения не существует, в задаче  $N \geq 3$  тел классическая теорема Брунса утверждает, что не существует дополнительных интегралов, которые были бы алгебраическими функциями декартовых координат  $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ . Но поскольку мы не придаем статус выделенной ни одной системе координат, не ясно, сколь высока ценность теоремы Брунса.
2. Известные интегралы не ограничивают в фазовом пространстве никакой компактной части, к которой была бы применима теорема Пуанкаре о возвращении. Возможно даже, что траектории, ведущие к столкновениям, могут быть всюду плотными в областях положительной меры.
3. В тех частях фазового пространства, в которых действует теория рассеяния, заведомо существуют дополнительные постоянные движения.
4. Компьютерные исследования в случае ограниченной задачи трех тел позволили обнаружить такие области фазового пространства, в которых уходящие на бесконечность траектории заполняют многообразия меньшей размерности, что позволяет предположить существование дополнительных постоянных движения [16]. С аналогичной ситуацией сталкиваемся и в задаче  $N$  тел.

## Точные решения (4.5.4)

Если  $N$ -угольник, образованный  $N$  частицами, движется в плоскости, то гравитацию нетрудно компенсировать центробежной силой. Условимся рассматривать декартовы координаты на плоскости соответственно как действительные и мнимые части комплексных чисел и положим

$$x_j(t) + iy_j(t) = z(t) z_j, \quad z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z_j \in \mathbb{C}.$$

Это соотношение означает, что фигура, образованная частицами, всегда остается подобной самой себе. Уравнения движения (при  $\kappa = 1$ )

$$\ddot{z} z_i = \sum_{j \neq i} \frac{(z_j - z_i) m_j}{|z_j - z_i|^3} \frac{z}{|z|^3} \quad (4.5.5)$$

допускают разделение на плоскую задачу Кеплера

$$\ddot{z} = -\omega^2 \frac{z}{|z|^3} \quad (4.5.6)$$

и алгебраическое уравнение

$$-\omega^2 z_i = \sum_{j \neq i} \frac{z_j - z_i}{|z_j - z_i|^3} m_j. \quad (4.5.7)$$

Таким образом, каждая частица движется по кеплеровской орбите вокруг общего центра масс (так как из (4.5.7) следует, что  $\sum z_i m_i = 0$ ).

## Примечания (4.5.8)

1. Из (4.5.6) нам известно, что решения существуют для всех  $\omega \in \mathbb{R}$ , поэтому остается обсудить только алгебраическое уравнение (4.5.7).

2. Полная энергия рассматриваемого движения равна

$$E = |\dot{z}|^2 \sum_i |z_i|^2 \frac{m_i}{2} - \frac{1}{2|z|} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|z_i - z_j|} = \left\{ \frac{|\dot{z}|^2}{2} - \frac{\omega^2}{|z|} \right\} \sum_i |z_i|^2 m_i,$$

т.е. произведению энергии кеплеровского движения и момента инерции. Частицы остаются в ограниченной области в том и только в том случае, если  $E < 0$ .

### Частный случай $N = 3$ (4.5.9)

Необходимо различать две разновидности этого случая.

а) Все три разности  $|z_i - z_j|$  равны ( $|z_i - z_j| = R$ ), т.е. тела расположены в вершинах равностороннего треугольника. Взяв сумму трех уравнений (4.5.7), найдем

$$(-\omega^2 R^3 + m_1 + m_2 + m_3) \sum_i z_i = 3 \sum_i z_i m_i = 0,$$

что действительно имеет место при  $\omega^2 R^3 = m_1 + m_2 + m_3$ . При этом удовлетворяются все три уравнения (4.5.7).

б)  $|z_1 - z_3| \neq |z_2 - z_3|$ . Если координаты выбраны так, что  $\operatorname{Re} z_3 = 0$ , то в силу (4.5.7)

$$\operatorname{Re} \left( \frac{m_1 z_1}{|z_3 - z_1|^3} + \frac{m_2 z_2}{|z_3 - z_2|^3} \right) = 0.$$

Но поскольку, кроме того,

$$\operatorname{Re} (m_1 z_1 + m_2 z_2) = -\operatorname{Re} m_3 z_3 = 0,$$

(т) то должно выполняться равенство  $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 = 0$ , т.е. все три частицы находятся на одной прямой. Именно так располагались три тела в равновесной конфигурации, которую мы рассмотрели как частный случай в параграфе 4.4.

Теперь возникает вопрос о том, могут ли вообще частицы удаляться в бесконечность при  $E \geq 0$  и покоящемся центре масс. В том, что это действительно так, нас убеждает следующая, уже упоминавшаяся, теорема.

### Теорема вириала (4.5.10)

Пусть

$$I := \sum_j m_j |\mathbf{x}_j|^2, \quad T = \sum_j \frac{|\mathbf{p}_j|^2}{2m_j}, \quad V = -\kappa \sum_{i>j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}.$$

Тогда  $\dot{I} = 2(E + T)$ .

**Доказательство** (см. задачу (4.5.23,1)).

### Следствия (4.5.11)

1. Так как  $T \geq 0$ , то имеет место неравенство  $I(t) \geq I(0) + t\dot{I}(0) + t^2 E$ . Поэтому при  $E > 0$  имеем  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} I(t) = \infty$  (если только система не коллапсирует раньше); по крайней мере одна частица должна удалиться на сколь угодно большое расстояние.

2. Если  $I(t)$  стремится к нулю, т.е. система коллапсирует, то это не может происходить асимптотически, а должно совершаться за конечное время. Связано это с тем, что  $I \rightarrow 0$  в том и только в том случае, если  $V \rightarrow -\infty$  (см. задачу (4.5.23,2)). А коль скоро имеем  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V = -\infty$ , то, в силу того что  $\dot{I} = 4E - 2V$ , существует такое  $t_0$ , для которого выполняется неравенство  $\dot{I} > 1 \quad \forall t > t_0$ . Но тогда равенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$  не выполняется.

3. Для квазипериодических движений существует последовательность  $\tau_i \rightarrow \infty$ , такая, что  $|\dot{I}(0) - \dot{I}(\tau_i)| < \varepsilon \quad \forall i$ . Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_i} \int_0^{\tau_i} dt (2T + V) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_i} (\dot{I}(\tau_i) - \dot{I}(0)) = 0.$$

Следовательно, среднее значение потенциальной энергии равно удвоенной полной энергии. Ясно, что такое возможно только при  $E < 0$ .

Если  $N \geq 3$ , то при  $E < 0$  энергетически возможно, что одна из частиц выбрасывается на бесконечность. Необходимая энергия всегда может быть сообщена за счет того, что остальные частицы группируются достаточно плотно. Можно было бы предположить, что когда кинетическая энергия частицы превосходит ее потенциальную энергию, то частица безвозвратно покидает систему. Но энергия отдельной частицы не сохраняется, и возникающая ситуация требует более подробного анализа.

#### Нижняя граница кинетической энергии (4.5.12)

Рассмотрим для простоты случай  $N = 3$ ,  $\kappa = m_1 = m_2 = m_3 = 1$ . Пусть  $E < 0$ ,

$$r_m = \min_{i \neq j} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|, \quad (4.5.13)$$

тогда в силу того, что  $|V| \geq |E|$ ,  $r_m$  удовлетворяет неравенству

$$r_m \leq r^* := \frac{3}{|E|}. \quad (4.5.14)$$

Чтобы отделить движение центра масс, введем координаты

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3), \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3) \quad (4.5.15)$$

(рис. 4.13). Так как (4.5.15) — ортогональное преобразование, то кинетическая энергия запишется просто в виде

$$T = \frac{1}{2} (|\dot{\mathbf{s}}|^2 + |\dot{\mathbf{u}}|^2 + |\dot{\mathbf{x}}|^2), \quad (4.5.16)$$

а потенциальная — в виде

$$V = -\frac{1}{\sqrt{2}|\mathbf{u}|} - \frac{\sqrt{2}}{|\sqrt{3}\mathbf{x} + \mathbf{u}|} - \frac{\sqrt{2}}{|\sqrt{3}\mathbf{x} - \mathbf{u}|}. \quad (4.5.17)$$

Полный угловой момент есть сумма углового момента центра масс  $[\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}]$  и внутреннего углового момента  $[\mathbf{u} \wedge \dot{\mathbf{u}}] + [\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}]$ . Оба угловых момента сохраняются. Если третья частица уходит на бесконечность, то интерес представляет координата  $x$ , а движение по ней удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\mathbf{x} + \mathbf{u}/\sqrt{3}}{|\mathbf{x} + \mathbf{u}/\sqrt{3}|^3} + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}/\sqrt{3}}{|\mathbf{x} - \mathbf{u}/\sqrt{3}|^3} \right). \quad (4.5.18)$$

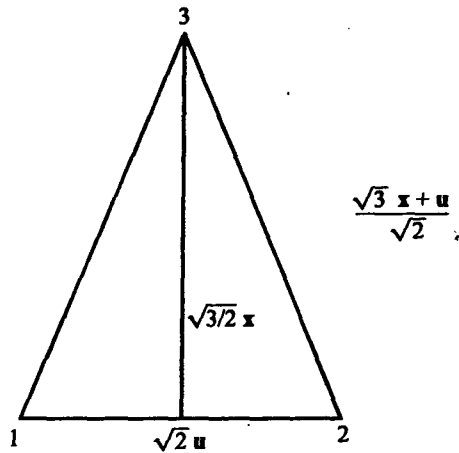


Рис. 4.13. Центр масс и относительные координаты для трех тел

И хотя  $u$  зависит от времени неизвестным образом, однако из (4.5.14) следует, что

$$\sqrt{\frac{3}{2}} r - \frac{r^*}{2} > r^* \Leftrightarrow r > \sqrt{\frac{3}{2}} r^*, \quad (r = |x|), \quad (4.5.19)$$

где  $|x_{1,2} - x_3| > r^*$ , а коль скоро это так, то должно выполняться неравенство  $|u| < r^*/\sqrt{2}$ . Это позволяет получить ограничение на  $\dot{r}$  снизу (см. задачу (4.5.23,3)):

$$\frac{\dot{r}(t)^2}{2} \geq \frac{\dot{r}(0)^2}{2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{r(0) + r^*/\sqrt{6}} + \frac{1}{r(0) - r^*/\sqrt{6}} \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{r(t) + r^*/\sqrt{6}} + \frac{1}{r(t) - r^*/\sqrt{6}} \right). \quad (4.5.20)$$

Неравенство (4.5.20) дает следующий грубый признак.

#### Признак ухода на бесконечность (4.5.21)

Если в некоторый момент времени  $|u| < r^*/\sqrt{2}$  и

$$r > \sqrt{\frac{3}{2}} r^*, \quad \dot{r} > 0, \quad \frac{\dot{r}^2}{2} > \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{r + r^*/\sqrt{6}} + \frac{1}{r - r^*/\sqrt{6}} \right),$$

то  $\dot{r}$  всегда остается положительным числом и ничто не может воспрепятствовать убежищу третьей частицы на бесконечность.

#### Примечания (4.5.22)

1. Признак (4.5.21) можно ослабить: производная  $\dot{r} > 0$  не обязательно должна быть больше нуля; даже первоначально сближающиеся частицы могут удалиться в бесконечность, если их энергия и угловой момент достаточно велики. Остальные частицы остаются на своих кеплеровских орбитах, поэтому столкновения не происходят. Это означает, что в фазовом пространстве существуют открытые области бесконечной меры, в которых частицы не сталкиваются и поток  $X_H$  полон. В тех областях, в которых одна частица уходит в бесконечность, существует даже максимальное число постоянных движения.

Например, если уходит третья частица, то существует преобразование Мёллера относительно функции Гамильтона, в которой потенциал заменен выражением

$$-\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} - \frac{m_3(m_1 + m_2)}{|\mathbf{x}_3 - (m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2)/(m_1 + m_2)|}.$$

При больших  $x_3$  разность между таким потенциалом и  $-\sum_{i>j} m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^{-1}$  убывает как  $|\mathbf{x}_3|^{-3}$ . Это приводит к появлению множителя  $|t|^{-3}$  в производной по времени от  $\Phi_{-t} \circ \Phi_t^0$ , что гарантирует сходимость при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

2. Чтобы понять смысл входящих в (4.5.21) чисел, выразим последнее условие через  $\rho = \sqrt{3/2} r$  — расстояние от третьей частицы до центра масс первой и второй частиц:

$$\frac{2}{3} \frac{\dot{\rho}^2}{2} \geq \frac{1}{\rho + r^*/2} + \frac{1}{\rho - r^*/2}.$$

Это неравенство означает, что потенциальная энергия третьей частицы  $\leq$  кинетической энергии третьей частицы с приведенной массой  $2/3$ . Приведенная масса

$$\frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

третьей и первых двух частиц уже встречалась нам в (4.2.3.4). С учетом этой поправки исходное “энергетическое” соображение становится корректным.

3. При  $N = 4$  существуют траектории убегания, по которым частицы уходят на бесконечность за конечное время [15]. Речь идет о линейной конфигурации частиц 1, 2, 3, 4 (именно в этом порядке), в которой частицы 3 и 4 сближаются. Высвобождающаяся энергия передается частице 2, которая все быстрее и быстрее колеблется между частицами 1 и (3,4), расталкивая их все дальше друг от друга. (Происходящие при этом парные столкновения рассматриваем как предел кеплеровского эллипса с большим эксцентриситетом. Частицы отражаются потенциалом  $-1/r$  и не проходят сквозь друг друга.)
4. Как показали компьютерные исследования задачи трех тел, рано или поздно одна из частиц получает столько энергии, что выполняется условие (4.5.21) и система распадается. Такая неустойчивость, известная в атомной физике под названием **эффекта Оже**, по-видимому, характерна для всех систем с потенциалами  $1/r$ . Можно даже предположить, что в случае примерно равных масс траектории, приводящие к распаду системы, всюду плотно заполняют обширные области фазового пространства. Разумеется, для физики существен вопрос о том, с какой вероятностью распад происходит за реалистические времена. К сожалению, современные аналитические методы не позволяют получить ответ, и исследователям приходится прибегать к компьютерам. Как показывают численные расчеты, существует большая вероятность того, что распад системы произойдет за 100 естественных периодов  $\tau \sim R^{3/2}/\sqrt{\kappa M}$  [8].

Эти скудные результаты отчетливо показывают, что при больших  $N$  анализ системы уравнений (1.1.1), (1.1.2) превосходит возможности современной математики. И хотя рассматриваются правильные выражения законов природы, их полезное содержание более чем скромно и позволяет высказывать мало существенных утверждений. Позднее, в рамках квантовой теории, мы еще вернемся к этим уравнениям и извлечем из них полезную с иной точки зрения информацию. Проследивать в деталях поведение всех траекторий невозможно, да и нежелательно, однако кое-какие предсказания о статистическом поведении системы все же можно сделать.



## Задачи (4.5.23)

1. Выведите (4.5.10).
2. Докажите, что  $I \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow -\infty$ .
3. Докажите (4.5.20). Воспользуйтесь тем, что  $\ddot{r} = \frac{\mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}}{r} + \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^2}{r} - \frac{(\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}})^2}{r^3} \geq \frac{(\mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}})}{r}$ .
4. С помощью (4.5.18) оцените, как изменяется во времени угловой момент  $\mathbf{L} := [\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}]$ . Пользуясь решением задачи (4.5.23,3), покажите, что частицы с достаточно большими  $r_0 := r(0)$ ,  $\mathbf{L}_0 := \mathbf{L}(0)$  и  $|\dot{r}_0|$  уходят на бесконечность даже при  $\dot{r}_0 < 0$ .

## Решения (4.5.24)

1. Величина  $\dot{I} = 2 \sum_j (\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{p}_j)$  равна удвоенной производящей функции растяжения — так называемому вириалу. Известно, что  $\{\dot{I}, T\} = 4T$ ,  $\{\dot{I}, V\} = 2V$ , поэтому (4.5.10) имеет место.
2. Так как при  $x > 0$  функция  $1/x$  выпуклая, то из неравенства Йенсена получаем

$$\begin{aligned} |V| \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{-1} &= \frac{\kappa}{2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^{-1} \geq \\ &\geq \frac{\kappa}{2} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \right)^{-1} \sum_{i \neq j} m_i m_j. \end{aligned}$$

Из равенств треугольника и Коши – Шварца следует

$$\sum_{i \neq j} m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \leq \sum_{i \neq j} m_i m_j (|\mathbf{x}_i| + |\mathbf{x}_j|) \leq 2M \sum_i m_i |\mathbf{x}_i| \leq 2M \left( \sum_i m_i \right)^{1/2} \left( \sum_i m_i |\mathbf{x}_i|^2 \right)^{1/2}$$

с  $M = \sum_i m_i$ . Таким образом, окончательно получаем

$$V \leq -\frac{\kappa}{4M^{3/2}} \left( \sum_{i \neq j} m_i m_j \right)^2 \left( \sum_i m_i |\mathbf{x}_i|^2 \right)^{-1/2}.$$

3. Из неравенства в условии задачи следует, что

$$\begin{aligned} \ddot{r} &\geq - \sup_{|u| < r^*/\sqrt{2}} \frac{\kappa}{r} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \frac{\mathbf{x} + \mathbf{u}/\sqrt{3}}{|\mathbf{x} + \mathbf{u}/\sqrt{3}|^3} + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}/\sqrt{3}}{|\mathbf{x} - \mathbf{u}/\sqrt{3}|^3} \right] \geq \\ &\geq - \sup_{|u| < r^*/\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{u}/\sqrt{3}|^2} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{u}/\sqrt{3}|^2} \right] = \\ &= - \frac{\sqrt{2/3}}{(r + r^*/\sqrt{6})^2} - \frac{\sqrt{2/3}}{(r - r^*/\sqrt{6})^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{r + r^*/\sqrt{6}} + \frac{1}{r - r^*/\sqrt{6}} \right), \end{aligned}$$

так как  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) > -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$  и сила становится максимальной, когда какая-то из частиц подходит как можно ближе к третьей частице. Умножая на  $\dot{r}$  и интегрируя, приходим к (4.5.20).

4. Пусть  $L_m \in \mathbb{R}^+$  — такое число, что  $|\mathbf{L}(t)| \geq L_m \forall t$ . Из (4.5.18) следует

$$\ddot{r} = \frac{\mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}}}{r^3} + \frac{|\dot{\mathbf{L}}|^2}{r^3} \geq -\sqrt{\frac{8}{3}} \frac{1}{(r - r^*/\sqrt{6})^2} + \frac{L_m^2}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial r} V_m(r),$$

где

$$V_m := -\sqrt{\frac{8}{3}} \frac{1}{r - r^*/\sqrt{6}} + \frac{L_m^2}{2r^2}.$$

Используя начальные значения  $r_0$  и  $\dot{r}_0$ , определяем  $v$  (соответственно  $r_m$ )

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \dot{r}_0^2 + V_m(r_0) = V_m(r_m)$$

и выбираем  $r_0$  и  $\dot{r}_0$  так, чтобы большее из двух решений для  $r_m$  было больше  $2r^*/\sqrt{6}$ . Так как сила, соответствующая  $V_m$ , всегда меньше, чем в действительности, то  $\forall t$  справедливо неравенство  $r > r_m$  и получаем

$$V_m(r) < v^2 r_m^2 / 2r^2, \quad |\dot{r}| > v \sqrt{1 - r_m^2 / r^2}.$$

Окончательно

$$vt < \left( \int_{r_m}^{r_0} + \int_{r_m}^r \right) \frac{dr v}{\sqrt{v^2 - 2V_m(r)}} < \left( \int_{r_m}^{r_0} + \int_{r_m}^r \right) \frac{dr v}{\sqrt{v^2 - v^2 r_m^2 / r^2}} = \sqrt{r_0^2 - r_m^2} + \sqrt{r^2 - r_m^2} < r_0 + r.$$

Необходимо еще показать, что  $L_0$  можно выбрать в соответствии с приведенными выше рассуждениями так, чтобы наши заключения оставались в силе при неограниченно возрастающем  $r$ . Из (4.5.18) следует

$$|\dot{\mathbf{L}}| = |\mathbf{x} \wedge \ddot{\mathbf{x}}| \leq \frac{2}{3} \frac{rr^*}{(r - r^*/\sqrt{6})^3},$$

поэтому справедливо неравенство

$$L > L_0 - \frac{4}{3} \int_{r_m}^{\infty} dr \frac{rr^*}{\dot{r}(r - r^*/\sqrt{6})^3} > L_0 - \frac{2}{3} \int_{r_m}^{\infty} dr \frac{\sqrt{6} r^2 r_m / v}{(r - r_m/2)^3 \sqrt{r^2 - r_m^2}} = L_0 - \frac{C}{v},$$

где

$$C := \frac{2}{3} \int_1^{\infty} dx \frac{\sqrt{6} x^2}{(x - 1/2)^3 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Если воспользоваться тем, что  $L_m \leq L_0 - C/v$ , и учесть, что  $|\mathbf{L}| \leq |\dot{r}r|$ , то задача сводится к выполнимости условия

$$r_0^2(v^2 - \dot{r}_0^2) + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{4r_0^2}{r_0 - r^*/\sqrt{6}} \leq \left( L_0 - \frac{C}{v} \right)^2 \leq \left( \dot{r}_0 r_0 - \frac{C}{v} \right)^2.$$

Тогда существует открытая область фазового пространства с  $v^2 \lesssim \dot{r}_0^2 \gg 1/r_0 \gg 1/r^*$ , где это условие выполнено, так как величина  $r^*$  зависит от полной энергии и может быть выбрана независимо от  $r_0$ ,  $\dot{r}_0$  и  $L_0$ .

## 5. Релятивистское движение

### 5.1. Гамильтонова формулировка электродинамических уравнений движения

*Теория относительности заменяет группу Галилея группой Пуанкаре. И хотя с математической точки зрения такая замена приводит лишь к незначительным усложнениям уравнения движения частицы во внешнем поле, однако физика больших скоростей выглядит совершенно иначе, чем нерелятивистский предельный случай.*

Как упоминалось в самом начале, ньютоновские уравнения представляют собой всего лишь некоторое приближение, и когда скорость частицы приближается к скорости света, должны быть заменены более общими уравнениями (1.1.4) или (1.1.6). Чтобы решить эти уравнения в нескольких, представляющих физический интерес, случаях, запишем (1.1.4) в гамильтоновой форме. Движение при этом происходит в расширенном конфигурационном пространстве  $M_e$ , которое должно быть подходящим открытым подмножеством в  $\mathbb{R}^4$ . Будем рассматривать только задачу одного тела, поскольку даже для двух тел с релятивистскими и, следовательно, не мгновенными взаимодействиями, известны лишь весьма частные решения [12].

#### Релятивистские обозначения (5.1.1)

(i) Пусть  $x^0 := t$ ,  $\mathbf{x} := (x^1, x^2, x^3)$  и единица времени выбрана так, что  $c = 1$ . Величины  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ , — декартовы координаты в расширенном фазовом пространстве  $M_e$ , и на этой карте задаем псевдометрическое тензорное поле (см. (2.4.9)):

$$\eta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} & \overbrace{0 & 1 & 2 & 3} \\ -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.1.2)$$

В  $T(M_e)$  ему соответствует скалярное произведение

$$\langle \partial_\alpha | \partial_\beta \rangle = \eta_{\alpha\beta}, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

и тем самым биективное отображение  $T(M_e) \rightarrow T^*(M_e)$ . Обратное отображение задается контравариантным тензорным полем  $\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$ ,  $\eta_{\alpha\beta} \eta^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$  (как и  $\eta_{\alpha\beta}$ ,  $\eta^{\alpha\beta}$  определяется формулой (5.1.2)).

(ii) Движение частицы описывается заданием ее координат  $x^\alpha$  как функций  $x^\alpha(s)$  параметра  $s$  — собственного времени. Точкой будем обозначать производную по  $s$ ,  $\dot{x}^\alpha := dx^\alpha/ds$ . Предполагается, что  $s$  нормирован так, чтобы  $\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \eta_{\alpha\beta} = -1$ . Тогда при  $|\dot{\mathbf{x}}| \ll 1$  имеем  $\dot{x}^0 \approx 1$ , и  $s$  совпадает с  $t$  (см. задачу (5.1.19,2)).

**Уравнение движения (5.1.3)**

Из (1.1.4) следует, что уравнение движения в электрическом  $\mathbf{E}$  и магнитном поле  $\mathbf{B}$  имеет вид

$$m \ddot{x}^\alpha \eta_{\alpha\beta} = e \dot{x}^\alpha F_{\alpha\beta}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Примечания (5.1.4)**

1. Так как  $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ , то имеем

$$\ddot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \eta_{\alpha\beta} = 0.$$

Нормировка (5.1.1(ii)) согласуется с (5.1.3).

2. Полагая  $\gamma = dt/ds$ , три пространственные компоненты уравнения движения (5.1.3) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left( m\gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = e \left( \mathbf{E} + \left[ \frac{d\mathbf{x}}{dt} \wedge \mathbf{B} \right] \right).$$

Следовательно, производная по времени от релятивистской массы  $m\gamma$  равна силе Лоренца. Помимо ускорения в направлении  $e\mathbf{E}$  сила Лоренца создает вращение в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки), если смотреть в направлении  $e\mathbf{B}$ . Так как стационарный электрический ток  $\mathbf{j}$  в начале координат индуцирует в точке  $\mathbf{x}$  магнитное поле  $\mathbf{B} = \frac{[\mathbf{j} \wedge \mathbf{x}]}{r^3}$ , то это соответствует притяжению двух параллельных токов (рис. 5.1).

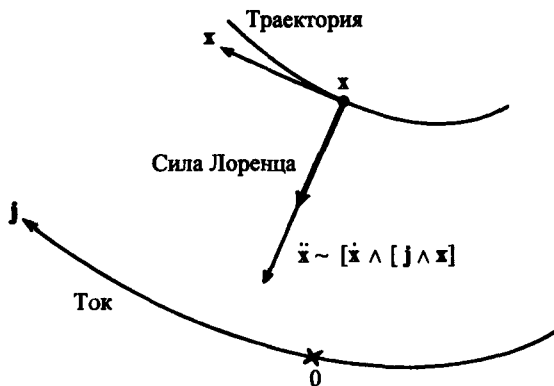


Рис. 5.1. Направление силы Лоренца

3. Временная компонента уравнения движения (5.1.3) выражает баланс энергии:

$$\frac{d}{dt} m\gamma = e \left( \mathbf{E} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right).$$

4. В нерелятивистском пределе  $\gamma \rightarrow 1$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow 0$  получаем прежние уравнения (1.1.1).

**Функция Лагранжа и функция Гамильтона (5.1.5)**

Электромагнитное поле  $F$  есть 2-форма на  $M_e$ , но не произвольная: она удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла:

$$dF = 0. \quad (5.1.6)$$

Будем работать только с такими многообразиями, на которых из (2.5.6,3) следует

$$F = dA, \quad A \in E_1(M_e). \quad (5.1.7)$$

В этом случае уравнения (5.1.3) становятся уравнениями Эйлера для функции Лагранжа (см. (2.3.18))

$$L(x(s), \dot{x}(s)) = \frac{m}{2} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \eta_{\alpha\beta} - e \dot{x}^\alpha A_\alpha(x). \quad (5.1.8)$$

В качестве соответствующего импульса получаем  $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{x}^\alpha$ , функцию Гамильтона находим по формуле (2.3.22):

$$p_\alpha = m \dot{x}^\beta \eta_{\alpha\beta} - e A_\alpha(x), \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_\alpha + e A_\alpha(x))(p_\beta + e A_\beta(x)) \eta^{\alpha\beta}. \quad (5.1.9)$$

**Примечания (5.1.10)**

1. В декартовых координатах соотношение (5.1.7) означает, если выписать его в явном виде, что

$$A = A_\alpha dx^\alpha, \quad F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta},$$

или, если разделить пространственные и временную компоненты,

$$A_\alpha = (V, -\mathcal{A}) : \mathbf{B} = \text{rot } \mathcal{A}, \quad \mathbf{E} = -\dot{\mathcal{A}} - \nabla V.$$

2. Каноническая форма  $\omega$  на  $T^*(M_e)$  есть

$$\omega = \sum_\alpha dx^\alpha \wedge dp_\alpha,$$

или

$$\{x^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta.$$

Соотношение (5.1.7) определяет  $A$  лишь с точностью до калибровочного преобразования  $A \rightarrow A + d\Lambda$ ,  $\Lambda \in C^\infty(M_e)$ . Оно оставляет инвариантными уравнения движения, но не  $\mathcal{H}$ . Если же калибровочное преобразование взять в комбинации с каноническим преобразованием (см. задачу (5.1.19,4))  $x^\alpha \rightarrow x^\alpha$ ,  $p_\beta \rightarrow p_\beta - e \Lambda_{,\beta}(x)$ , то  $\mathcal{H}$  останется инвариантным. Канонические импульсы  $p_\alpha$  (и тем самым начало координат в  $T^*(M_e)$ ) не являются калибровочно инвариантными, тогда как  $\dot{x}^\alpha$  калибровочно инвариантны.

3. Наоборот, из (2.5.6,3) следует, что  $A$ , порождающие одну и ту же  $F$ , в звездообразных областях отличаются самое большее на калибровочное преобразование. ▮

4. Скобки Пуассона между  $x^\alpha$  и  $\dot{x}^\beta$  по-прежнему представимы в виде

$$\{x^\alpha, \dot{x}^\beta\} = \frac{\eta^{\alpha\beta}}{m}, \quad \text{хотя} \quad \{\dot{x}^\alpha, \dot{x}^\beta\} = \frac{-e}{m^2} \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} F_{\gamma\delta}(x)$$

теперь не нуль, а содержит только калибровочно инвариантную величину  $F$ .

5. Так как  $\mathcal{H}$  не зависит явно от  $s$ , то  $\mathcal{H}$  — постоянная движения. Если  $\mathcal{H}$  выразить через  $\dot{x}$ , то она примет следующий вид:

$$\mathcal{H} = \frac{m\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{2} \eta_{\alpha\beta}.$$

Поэтому всегда находимся на подмногообразии  $\mathcal{H} = -m/2$ , что соответствует нормировке  $s$  в (5.1.1,ii).

6. В нашей канонической формулировке уравнений движения используется вектор-потенциал  $A$ , который не только калибровочно не инвариантен, но и не существует на некоторых многообразиях. Однако можно обойтись и без  $A$ . Диффеоморфизм расширенного фазового пространства  $\varphi: \varphi(x, p) = (x, p - eA(x))$  преобразует  $\mathcal{H}$  в  $\varphi_*(\mathcal{H}) = p^\alpha p^\beta \eta_{\alpha\beta} / 2m$ . Этот диффеоморфизм не канонический, поскольку  $\varphi_*(\omega) = \omega - eF$  и  $\varphi_*\{A, B\} = \{\varphi_*(A), \varphi_*(B)\}_{\varphi_*(\omega)}$ , где  $\{\}_{\varphi_*(\omega)}$  — скобки Пуассона, вычисленные с  $\omega - eF$  вместо  $\omega$ . Так как

$$\varphi_*(\omega) \wedge \varphi_*(\omega) \wedge \varphi_*(\omega) \wedge \varphi_*(\omega) = \omega \wedge \omega \wedge \omega \wedge \omega,$$

то форма  $\varphi_*(\omega)$  не вырождена, а поскольку  $dF = 0$ , поэтому можем использовать  $\varphi(\omega)$  как симплектическую форму на  $T^*(M_e)$ . Это означает, что влияние функции  $F$  на движение можно учесть с помощью изменения формы  $\omega$  вместо изменения функции  $\mathcal{H}$ :  $\mathcal{H}$  остается равной  $\dot{x}^2 m/2$ , но скобки Пуассона скоростей не обращаются в нуль. В такой формулировке фигурирует только  $F$ . Хотя в рассмотренных нами случаях вектор-потенциал  $A$  не только определен, но и проще  $F$ , однако в дальнейшем будем работать с соотношениями вида (5.1.5).

### Пример: свободные частицы (5.1.11)

Сравним случай  $e = 0$  с результатами параграфа 4.1. На этот раз

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p_\alpha p_\beta \eta^{\alpha\beta} = \frac{1}{2m} (|\mathbf{p}|^2 - p_0^2),$$

$E = m\dot{t}$  равна теперь  $-p_0$ , поэтому дополнительный член  $E$  из (3.2.12) изменяется на множитель  $-p_0/2m$ . Следовательно, наибольшая группа точечных преобразований в  $T^*(M_e)$ , оставляющих инвариантной  $\mathcal{H}$ , есть группа Пуанкаре (= трансляции + преобразования Лоренца):

$$x^\alpha \rightarrow \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + \lambda^\alpha, \quad \lambda \in \mathbb{R}^4, \quad \Lambda^t \eta \Lambda = \eta, \quad p_\alpha \rightarrow \eta_{\alpha\gamma} \Lambda^\gamma_\delta \eta^{\delta\beta} p_\beta. \quad (5.1.12)$$

Пусть  $\varepsilon$  — параметр одномерной подгруппы с инфинитезимальными элементами

$$\lambda^\alpha = \varepsilon e^\alpha, \quad \Lambda^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + \varepsilon L^\alpha_\beta, \quad (\eta L)^t = L^t \eta = -\eta L. \quad (5.1.13)$$

Тогда генератор подгруппы (см. (3.2.6)) имеет вид

$$p_\alpha e^\alpha + L^\alpha_\beta p_\alpha x^\beta. \quad (5.1.14)$$

Снова получаем  $4 + 6 = 10$  постоянных движений. Шесть генераторов преобразования Лоренца, соответствующих  $L^\alpha_\beta$  (см. задачу (5.1.19,5)), в силу антисимметрии, налагаемой соотношением (5.1.13), можно записать в виде

$$M^{\alpha\beta} := p^\alpha x^\beta - p^\beta x^\alpha, \quad p^\alpha := \eta^{\alpha\beta} p_\beta. \quad (5.1.15)$$

Четыре генератора, соответствующих  $e^\alpha$ , охватывают энергию-импульс, причем  $-p_0 = p^0 = m\gamma$  — релятивистская энергия. Три пространственные компоненты величины  $M^{\alpha\beta}$  снова образуют угловой момент

$$\mathbf{L} = [\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}], \quad (5.1.16)$$

а теорема о центре масс, связанная с  $M^{0\beta}$ ,  $\beta = 1, 2, 3$ , теперь означает, что

$$\mathbf{K} := \mathbf{p}t - p^0 \mathbf{x} = \text{const}. \quad (5.1.17)$$

На 7-мерном подмногообразии  $-2m\mathcal{H} = p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$  выполняются, как и должно быть, три соотношения

$$[\mathbf{p} \wedge \mathbf{K}] = p^0 \mathbf{L}. \quad (5.1.18)$$

Таким образом, относительно числа независимых постоянных движения и структуры траекторий, несмотря на переход к другой группе инвариантности, остаются в силе такие же соотношения, как и в нерелятивистском случае параграфа 4.1.

### Задачи (5.1.19)

1. Вычислите скобки Пуассона генераторов группы Пуанкаре и сравните их со скобками Пуассона генераторов группы Галилея.
2. Покажите, что из равенства  $\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \eta_{\alpha\beta} = -1$  следует неравенство  $|d\mathbf{x}/dt| < 1$ . Таким образом, (5.1.4,1) означает, что электромагнитные силы не могут разогнать частицы до сверхвысоких скоростей.
3. Предположим, что функция Лагранжа  $L$  для релятивистского движения в скалярном поле  $\Phi \in T_0^0(M_e)$  представима в виде

$$L = \frac{1}{2} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \eta_{\alpha\beta} - \Phi(x).$$

Может ли частица в таком поле ускориться до сверхвысокой скорости?

4. Докажите, что (5.1.10,3) — каноническое преобразование. (Вычислите скобки Пуассона.)
5. Докажите, что условие (5.1.13) определяет 6-мерное подмногообразие матриц размерности  $(4 \times 4)$  (см. (2.1.10,3)).

### Решения (5.1.20)

1.

$$\{p_i, p_j\} = \{p_i, p_0\} = \{L_i, p_0\} = 0, \quad \{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{p_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k,$$

$$\{K_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} K_k, \quad \{p^0, K_j\} = p_j, \quad \{K_i, K_j\} = -\varepsilon_{ijm} L_m, \quad \{p_i, K_j\} = p^0 \delta_{ij}.$$

Отличие от группы Галилея состоит в последних соотношениях, в правую часть которых в случае группы Галилея вместо  $p^0$  входит  $m$ . В нерелятивистском пределе  $p^0$  переходит в  $m$ , а группа Пуанкаре в этом смысле переходит в группу Галилея. Следует иметь в виду, однако, что элементы группы Пуанкаре являются точечными преобразованиями в  $T^*(M_e)$ , тогда как элементы группы Галилея таковыми не являются.

2.

$$dt^2 - |d\mathbf{x}|^2 = ds^2 \Rightarrow \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 = 1 - \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 < 1.$$

3. Непосредственно получаем  $\dot{x}^\alpha \eta_{\alpha\beta} = \Phi_{,\beta}$  (например, при  $\Phi = -|\mathbf{x}|^2/2$  находим  $\dot{x}^0 = 0$ ). Следовательно,  $x^0 = s$  — одно из решений, и  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) \text{ch } t + \dot{\mathbf{x}}(0) \text{sh } t$ . Скорость  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  может быть сколь угодно большой.
4. Единственные отличные от нуля скобки Пуассона имеют вид

$$\{p_\alpha + e\Lambda_{,\alpha}, p_\beta + e\Lambda_{,\beta}\} = e(\Lambda_{,\beta\alpha} - \Lambda_{,\alpha\beta}) = 0.$$

5. Пусть  $L_{\alpha\beta}$  — компоненты  $\eta L$ . Для 16 функций  $N_{\alpha\beta} := L_{\alpha\beta} + L_{\beta\alpha}$  из (5.1.13) следует  $N_{\alpha\beta} = 0$ . Из дифференциалов  $dN_{\alpha\beta}$  вследствие соотношений  $dN_{\alpha\beta} = dN_{\beta\alpha}$  линейно независимы только десять.

## 5.2. Постоянное поле

*Постоянное поле — это интегрируемая система, служащая релятивистским обобщением элементарного примера свободного падения, но содержащая в качестве частного случая ларморовское движение в магнитном поле.*

В этом параграфе рассмотрим движение в электромагнитном поле, компоненты которого в декартовых координатах постоянны. Постоянство напряженностей поля  $F_{\alpha\beta}$  означает, что потенциалы линейны по  $x^\alpha$ :

$$A_\beta = \frac{1}{2} x^\alpha F_{\alpha\beta}. \quad (5.2.1)$$

Так как  $A_\beta \in C_1(\mathbb{R}^4)$ , то можем воспользоваться  $M_e = \mathbb{R}^4$ . Вектор-потенциал  $A$  частично нарушает инвариантность (5.1.9) функции Гамильтона  $\mathcal{H}$  относительно группы Пуанкаре. В частности,  $p_\alpha$  — более не постоянные движения, хотя уравнения движения (5.1.3) трансляционно инвариантны. Сдвиг  $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \lambda^\alpha$  порождает отображение  $A_\beta \rightarrow A_\beta + \frac{1}{2} \lambda^\alpha F_{\alpha\beta}$ , что соответствует калибровочному преобразованию с  $\Lambda = \frac{1}{2} \lambda^\alpha F_{\alpha\beta} x^\beta$  (см. (5.1.10,4)). Добавляя генераторы калибровочного преобразования  $\frac{e}{2} F_{\alpha\beta} x^\beta$  к генераторам сдвига, получаем следующие постоянные движения (см. задачу (5.10.21,4)).

### Постоянные движения (5.2.2)

$$\frac{d}{ds} \left( p_\alpha + \frac{e}{2} F_{\alpha\beta} x^\beta \right) = 0.$$

В калибровочно инвариантной формулировке (5.1.10,6) они порождают преобразование  $x \rightarrow x + \lambda$ ,  $p \rightarrow p$ .

Хотя преобразования Лоренца даже не оставляют инвариантными уравнения движения, их тем не менее можно использовать, чтобы привести задачу к более удобному виду.

### Трансформационные свойства тензора электромагнитного поля (5.2.3)

Под действием преобразования Лоренца

$$\bar{x} = \Lambda x, \quad \Lambda^t \eta \Lambda = \eta$$

напряженности поля преобразуются как 2-форма:

$$\bar{F} = \eta \Lambda \eta F \eta \Lambda^t \eta. \quad (5.2.4)$$

1-Форма  $A$  преобразуется как  $p$ :

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \bar{x} \bar{F} = \frac{1}{2} x \Lambda^t \eta \Lambda \eta F \eta \Lambda^t \eta = \frac{1}{2} x F \eta \Lambda^t \eta = \eta \Lambda \eta A. \quad (5.2.5)$$

При пространственных вращениях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  преобразуются как векторы, но, порожденные  $\mathbf{K}$  (5.1.17), преобразования в движущуюся систему координат приводят к их перемешиванию. Например,  $K_i$  порождает однопараметрическую группу ( $v \in (-1, 1)$ )

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-v^2} & -v/\sqrt{1-v^2} & 0 & 0 \\ -v/\sqrt{1-v^2} & 1/\sqrt{1-v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.6)$$



Формула преобразования (5.2.4), если ее записать в терминах  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , гласит:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= E_1, & \bar{B}_1 &= B_1, & \bar{E}_2 &= \frac{E_2 - B_3 v}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ \bar{B}_2 &= \frac{B_2 + E_3 v}{\sqrt{1 - v^2}}, & \bar{E}_3 &= \frac{E_3 + B_2 v}{\sqrt{1 - v^2}}, & \bar{B}_3 &= \frac{B_3 - E_2 v}{\sqrt{1 - v^2}}.\end{aligned}\quad (5.2.7)$$

### Нормальная форма тензора электромагнитного поля (5.2.8)

Чтобы обсудить возможные изменения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  под действием  $\Lambda$ , прежде всего вспомним, что существуют два инварианта:

$$*(F \wedge F) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{и} \quad *(F \wedge *F) = 2(|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2). \quad (5.2.9)$$

Поэтому утверждения  $|\mathbf{B}| \geq |\mathbf{E}|$ ,  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|$  и  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  инвариантны относительно группы Пуанкаре. Если оба инварианта (5.2.9) равны нулю, то это означает, что  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$  и  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ . В противном случае с помощью преобразования Лоренца всегда можно добиться, чтобы  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ : с помощью вращения плоскость, задаваемую векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , можно совместить с плоскостью 2-3, после чего выбрать  $v$  в (5.2.6) так, чтобы  $\bar{E}_2/\bar{B}_2 = \bar{E}_3/\bar{B}_3$  (см. задачу (5.2.21,1)).

Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $E_2 = E_3 = B_2 = B_3 = 0$  и полагать  $E_1 =: E$ ,  $B_1 =: B$ . Частный случай, когда оба инварианта равны нулю, рассмотрим в параграфе 5.4. Итак,  $F$  и  $A$  имеют следующие компоненты:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{2}(-Ex, Et, zB, -yB). \quad (5.2.10)$$

Соответственно  $\mathcal{H}$  разделяется на две части, одна из которых зависит только от координат 0,1, а другая — только от координат 2,3:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[ \left( p_y + \frac{ezB}{2} \right)^2 + \left( p_z - \frac{eyB}{2} \right)^2 + \left( p_x + \frac{etE}{2} \right)^2 - \left( p_0 - \frac{exE}{2} \right)^2 \right] =: \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_E. \quad (5.2.11)$$

### Поток, порождаемый $\mathcal{H}_B$ (5.2.12)

$\mathcal{H}_B$  действует в четырехмерном фазовом пространстве с координатами  $(y, z, p_y, p_z)$ . Поэтому, чтобы полностью задать траекторию, достаточно двух дополнительных постоянных движения. Так как при  $B = 0$  получается свободный поток, то предполагаем, что  $B \neq 0$ . Из (5.2.2) следует, что соответствующие две постоянные движения ( $\alpha = 2, 3$ ) пропорциональны:

$$\bar{y} := \frac{y}{2} + \frac{p_z}{eB}, \quad \bar{z} := \frac{z}{2} - \frac{p_y}{eB}. \quad (5.2.13)$$

Они определяют неподвижный центр ларморовских траекторий на плоскости  $(yz)$ :

$$(\bar{y} - y)^2 + (\bar{z} - z)^2 = \frac{2m}{e^2 B^2} \mathcal{H}_B. \quad (5.2.14)$$

Таким образом, ларморовские траектории — это окружности радиуса  $\sqrt{2m\mathcal{H}_B}/eB$  с центром в точке  $(\bar{y}, \bar{z})$ .

## Примечания (5.2.15)

1. Если  $(\bar{y}, \bar{z}) \neq (0, 0)$ , то угловой момент  $(y\dot{z} - z\dot{y})m$  не сохраняется. Но так как функция Гамильтона  $\mathcal{H}$  не инвариантна относительно вращений вокруг оси  $x$ , то генератор (так называемый канонический угловой момент)

$$\bar{L}_1 := yp_z - zp_y$$

должен быть постоянной движения. Но  $\bar{L}_1$  калибровочно не инвариантен и вообще не имеет физического смысла. В калибровке, выбранной нами для  $A$ , можно выразить  $\bar{L}_1$  через уже найденные нами калибровочно инвариантные постоянные:

$$2eB\bar{L}_1 = -2m\mathcal{H}_B + e^2B^2(\bar{y}^2 + \bar{z}^2).$$

Этого следовало ожидать, так как в четырехмерном фазовом пространстве, соответствующем  $\mathcal{H}_B$ , “есть место” только для трех независимых постоянных.

2. Это означает, что между тремя постоянными должны существовать не обращающиеся в нуль скобки Пуассона, и действительно

$$\{\bar{z}, \bar{y}\} = \frac{1}{eB}.$$

Так как скобки Пуассона  $\{\bar{y}, \bar{z}\}$  не зависят от координат и дают нулевые скобки Пуассона со всеми величинами, то абелева структура группы инвариантности, порождаемой  $\bar{y}$  и  $\bar{z}$ , не приводит к какому-либо противоречию (см. задачу (5.2.21,5)). Тожество Якоби гарантирует, что  $\forall f \in C^\infty(T^*(M))$   $\{\bar{z}, \{\bar{y}, f\}\} = \{\bar{y}, \{\bar{z}, f\}\}$  (см. (3.2.8,2)).

3. Так как скобки Пуассона от  $(\bar{y}, \bar{z})$  с отдельными вкладками в  $\mathcal{H}_B$  равны нулю:  $\{\bar{y}, \dot{y}\} = \{\bar{y}, \dot{z}\} = \{\bar{z}, \dot{y}\} = \{\bar{z}, \dot{z}\} = 0$ , и из (5.1.10,4) следует  $\{\dot{y}, \dot{z}\} = eB/m^2$ , то преобразование

$$(y, z; p_y, p_z) \rightarrow \left( eB\bar{z}, \frac{m^{3/2}}{eB} \dot{y}; \bar{y}, m^{1/2} \dot{z} \right)$$

будет каноническим. Обозначив вторую пару

$$\left( \frac{m^{3/2}}{eB} \dot{y}, m^{1/2} \dot{z} \right)$$

этих канонических переменных через  $q$  и  $p$ , получим просто функцию Гамильтона  $\mathcal{H}_B$  гармонического осциллятора с **циклотронной частотой**  $\omega := eB/m$ :

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2).$$

Таким образом, перед нами вырожденный случай ситуации, описанной в (3.3.8). Из двух частот одна всегда равна нулю, а другая —  $eB/m$ . Физически это означает, что движение происходит по круговым орбитам с частотой, не зависящей ни от центра, ни от радиуса.

4. В явном виде параметрическое представление траектории через постоянные движения выглядит следующим образом:

$$y(s) = \bar{y} + \frac{\sqrt{2m\mathcal{H}_B}}{eB} \cos \omega(s - s_0), \quad z(s) = \bar{z} - \frac{\sqrt{2m\mathcal{H}_B}}{eB} \sin \omega(s - s_0).$$

**Поток, порождаемый  $\mathcal{H}_E$**  (5.2.16)

При  $E \neq 0$ , с точностью до некоторых изменений в знаках, этот случай рассматривается так же, как и предыдущий. Остающиеся из (5.2.2) постоянные движения пропорциональны

$$\bar{x} = \frac{x}{2} + \frac{p_0}{eE}, \quad \bar{t} = \frac{t}{2} - \frac{p_x}{eE}, \quad (5.2.17)$$

поэтому траектории имеют вид **гипербол**

$$(\bar{x} - x)^2 - (\bar{t} - t)^2 = -\frac{2m}{e^2 E^2} \mathcal{H}_E. \quad (5.2.18)$$

**Примечания** (5.2.19)

1. Так как  $E_1$  не изменяется под действием преобразования Лоренца (5.2.6) (см. (5.2.7)), то генератор преобразования

$$\bar{K}_1 = xp_0 + tp_x = \frac{m}{eE} \mathcal{H}_E + \frac{eE}{2} (\bar{x}^2 - \bar{t}^2)$$

есть постоянная движения, хотя она и зависит от найденных постоянных движения.

2. Из скобок Пуассона

$$\{\bar{x}, \bar{t}\} = -\frac{1}{eE}, \quad \{\dot{x}, \dot{t}\} = \frac{eE}{m^2}, \quad \{\bar{x}, \dot{x}\} = \{\bar{x}, \dot{t}\} = \{\bar{t}, \dot{x}\} = \{\bar{t}, \dot{t}\} = 0,$$

видим, что  $\left( eE\bar{t}, \frac{m^{3/2}}{eE} \dot{x}; \bar{x}, m^{1/2}\dot{t} \right)$  — канонические координаты и

$$\mathcal{H}_E = -\frac{1}{2}(p^2 - \nu^2 q^2), \quad q = \frac{m^{3/2}}{eE} \dot{x}, \quad p = m^{1/2}\dot{t}, \quad \nu = \frac{eE}{m}.$$

3. Если надлежащим образом изменить знаки в потенциале осциллятора, то координаты становятся гиперболическими функциями собственного времени:

$$x(s) = \bar{x} + \frac{\sqrt{2m|\mathcal{H}_E|}}{eE} \operatorname{ch} \nu(s - s_0), \quad t(s) = \bar{t} + \frac{\sqrt{2m|\mathcal{H}_E|}}{eE} \operatorname{sh} \nu(s - s_0).$$

4. Что касается полного числа постоянных движения, то мы до сих пор нашли шесть постоянных, но они не являются независимыми от  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_E + \mathcal{H}_B$ . Следовательно, нам остается найти еще одну постоянную движения. Это можно сделать, заметив, что функция, обратная гиперболическому синусу, существует глобально и  $s - s_0$  можно выразить через  $t - \bar{t}$ . Дополнительной независимой постоянной движения оказывается

$$y = \frac{\sqrt{2m\mathcal{H}_B}}{eB} \cos \left[ \omega \operatorname{arsh} \frac{eE}{\sqrt{2m|\mathcal{H}_E|}} (t - \bar{t}) \right],$$

поэтому траектории — одномерные подмногообразия, естественно, диффеоморфные  $\mathbb{R}$ , так как в расширенном фазовом пространстве не существует замкнутых траекторий.

### Движение, рассматриваемое из другой системы отсчета (5.2.20)

Если  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  параллельны, то параллельно полю движение гиперболическое, а перпендикулярно — круговое. За исключением того, когда  $|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{V}|^2 = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{V}) = 0$ , общий случай может быть получен из  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{V}$  с помощью преобразования Лоренца в плоскости, перпендикулярной полю. Например, векторы  $\mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{V} = -V(1, 0, 0)$  преобразованием Лоренца в направлении 2 можно перевести в векторы

$$\mathbf{E} = \left( 0, 0, \frac{Bv}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad \mathbf{V} = \left( -\frac{B}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0 \right).$$

Движение по круговым траекториям (вокруг оси  $x$ ) переходит в движение в направлении 2, т.е. перпендикулярное вектору  $\mathbf{E}$  (рис. 5.2). В новой системе координат этому находят объяснение, ссылаясь на существование электрического поля, параллельно которому стремятся двигаться частицы. В то же время магнитное поле  $\mathbf{V}$  изгибает траектории, причем тем сильнее, чем меньше скорость и, соответственно, координата  $z$ , что порождает скорость дрейфа в направлении 2, как показано на рис. 5.2.

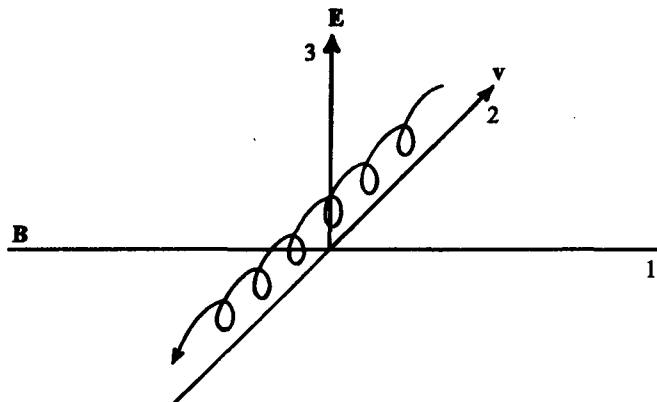


Рис. 5.2. Влияние электрического поля, перпендикулярного к  $\mathbf{V}$  (траектория остается в плоскости 2-3 и отклоняется перпендикулярно к  $\mathbf{E}$ )

### Задачи (5.2.21)

1. Определите скорость  $v$  преобразования Лоренца, переводящего векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  в параллельные (за исключением случая, когда  $|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{V}|^2 = 0 = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{V})$ ).
2. Обсудите уравнения движения в однородном электромагнитном поле, не используя постоянные движения.
3. Выразите  $F \wedge F$  через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$ .
4. С помощью уравнений движения убедитесь в том, что (5.2.2) — постоянные движения.
5. Какая группа инвариантности функции Гамильтона  $\mathcal{H}_V$  (соответственно  $\mathcal{H}_E$ ) порождает  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  из (5.2.13) (соответственно  $\bar{x}$ ,  $\bar{t}$  из (5.2.17))?
6. Какую форму имеют траектории в импульсах и скоростях?
7. Запишите (5.2.9) как \* некоторой 4-формы (см. (2.4.29,4)).

## Решения (5.2.22)

1. Из равенства  $\bar{E}_2/\bar{E}_3 = \bar{B}_2/\bar{B}_3$  с учетом (5.2.7) получаем

$$v^2 - v \frac{E_2^2 + E_3^2 + B_2^2 + B_3^2}{E_2 B_3 - E_3 B_2} + 1 = 0.$$

Уравнение  $v^2 - 2\alpha v + 1 = 0$  имеет решение  $|v| < 1$ , если  $|\alpha| > 1$  и  $|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 > 2|\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{B}| > 2|[\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}]|$ .

2. Уравнение  $\dot{x}(s) = M \dot{x}(s)$ ,  $M^i_k = \frac{e}{m} \eta^{ij} F_{jk}$  имеет решение  $\dot{x}(s) = e^{sM} \dot{x}(0)$ . Чтобы проинтегрировать его еще раз, ищем подпространство, на котором коэффициент  $M$  не имеет особенностей. На этом подпространстве  $x(s) = M^{-1} e^{sM} \dot{x}(0) + \text{const}$ . Если же  $M$  имеет особенность, то  $x(s) \sim s$ .

3.  $F \wedge F = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ .

4.  $\dot{p}_\alpha + \frac{e}{2} F_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta = m \ddot{x}_\alpha + e F_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta = 0$ .

5.  $(y, z; p_y, p_z) \rightarrow \left( y + \frac{a_3}{eB}, z - \frac{a_2}{eB}, p_y + \frac{a_2}{2}, p_z + \frac{a_3}{2} \right)$

соответственно  $(x, t; p_x, p_0) \rightarrow \left( x + \frac{a_0}{eE}, t - \frac{a_1}{eE}, p_x + \frac{a_1}{2}, p_0 + \frac{a_0}{2} \right)$ ,  $a_i \in \mathbf{R}$ .

6. И в том, и другом случае траектории имеют форму окружностей (соответственно, гипербол), так как

$$y^2 + z^2 = \frac{2}{m} \mathcal{H}_B = \frac{1}{m^2} \left[ \left( p_z - \frac{eB}{2} \bar{y} \right)^2 + \left( p_y + \frac{eB}{2} \bar{z} \right)^2 \right],$$

соответственно,

$$x^2 - t^2 = \frac{2}{m} \mathcal{H}_E = \frac{1}{m^2} \left[ \left( p_x - \frac{eE}{2} \bar{t} \right)^2 - \left( p_t + \frac{eE}{2} \bar{x} \right)^2 \right].$$

7.  $|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2 = *(F \wedge *F) \cdot 2$ .

## 5.3. Кулоновское поле

*Релятивистские поправки нарушают  $O(4)$ -симметрию, но система остается интегрируемой.*

Когда атомная физика делала свои первые шаги, движение, описываемое формулами (5.1.9) с  $eA = (\alpha/r, 0, 0, 0)$ , ( $r = |\mathbf{x}|$ ), играло большую роль. Хотя к движению атомов следует применять квантовую механику, однако классическое решение представляет интерес не по контрасту с квантовомеханическим, а как связующее звено с гравитационным случаем, который будет рассмотрен в дальнейшем.

## Функция Гамильтона (5.3.1)

$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( |\mathbf{p}|^2 - \left( p_0 + \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right)$  принадлежит  $C^\infty T^*(\mathbf{R} \times (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}))$  и расширенное конфигурационное пространство с помощью сферических координат может быть отображено на  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times S^2$ . Так как функция Гамильтона  $\mathcal{H}$  из координат зависит явно только от  $r$ , то получаем следующие постоянные движения.

## Постоянные движения (5.3.2)

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{ds} [\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}] = 0, \quad \dot{p}_0 = 0, \quad \dot{\mathcal{H}} = 0.$$

## Примечания (5.3.3)

1. Из пяти постоянных движения можно построить четыре постоянных с нулевыми скобками Пуассона. Хотя скобки Пуассона от различных компонент углового момента  $\mathbf{L}$  не обращаются в нуль, однако имеют место равенства

$$\{L_i, |\mathbf{L}|^2\} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

поскольку величина  $|\mathbf{L}|^2$  как скаляр вращательно инвариантна. Следовательно,  $\mathcal{H}$ ,  $p_0$ ,  $|\mathbf{L}| =: L$  и, например,  $L_3$  — четыре постоянные движения, которые требовалось найти. В итоге, система становится интегрируемой.

2. Зависимость от времени можно определить из уравнения  $\dot{t} = -(p_0 + \alpha/r)/m$ , если известна зависимость  $r(s)$ .
3. Функция Гамильтона  $\mathcal{H}$  допускает разделение переменных в координатах  $(x, p)$  и  $(t, E)$ . Это позволяет рассматривать движение только в пространственном фазовом пространстве  $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ . Такое движение описывается функцией  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} + \frac{p_0^2}{2m} =: H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \frac{\alpha}{r} \frac{p^0}{m} - \frac{\alpha^2}{2mr^2}.$$

Функция  $H$  связана с энергией  $E = p^0$  соотношением

$$p^0 = m \sqrt{1 + \frac{2H}{m}} = \frac{\alpha}{r} + \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2},$$

поскольку функция Гамильтона  $\mathcal{H}$  должна быть равной  $-m/2$ . Компоненту  $p^0$  в  $H$  следует рассматривать как постоянную, значение которой не зависит от  $H$ .

4. По сравнению с (4.2.2)  $H$  содержит отрицательный дополнительный член, так как

$$\sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2} - m \leq \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}.$$

При  $H < 0$  траектории в  $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  остаются в компактных множествах, и становится применимой теорема Арнольда. Чтобы определить частоты, введем переменные угол-действие.

## Переменные угол-действие (5.3.4)

Из  $H$ ,  $L$  и  $L_3$  требуется образовать такие величины, чтобы сопряженные с ними переменные были тремя углами в  $T^3$ . Как мы уже знаем, компоненты  $L_3$  порождают вращение вокруг оси  $z$  и сопряжены с  $\varphi$ . Чтобы получить угол, сопряженный с  $L$ , заключаем из (см. (3.1.12,4))

$$\{|\mathbf{L}|^2, x_i\} = 2L\{L, x_i\} = 2(\mathbf{L} \cdot \{\mathbf{L}, x_i\}) = 2[\mathbf{L} \wedge \mathbf{x}]_i, \quad (5.3.5)$$

что  $L$  порождает вращение вокруг  $\mathbf{L}$ , т.е. в плоскости траектории:

$$\{L, \mathbf{x}\} = \left[ \frac{\mathbf{L}}{L} \wedge \mathbf{x} \right], \quad \{L, \mathbf{p}\} = \left[ \frac{\mathbf{L}}{L} \wedge \mathbf{p} \right]. \quad (5.3.6)$$

Если предположить, что  $\mathbf{L}$  не направлен вдоль оси  $z$ , и определить углы  $\varphi$  и  $\chi$  соотношениями

$$\cos \varphi = \frac{L_2}{\sqrt{|\mathbf{L}|^2 - L_3^2}}, \quad \cos \chi = \frac{[\mathbf{L} \wedge \mathbf{x}]_3}{r \sqrt{|\mathbf{L}|^2 - L_3^2}} = r^{-1} (|\mathbf{L}|^2 - L_3^2)^{-1/2} ([\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{L}] \cdot \mathbf{x}), \quad \text{где } \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{x}_i}{r},$$

то геометрически это означает, что  $[L \wedge e_3](|L|^2 - L_3^2)^{-1/2}$  — собственный вектор, перпендикулярный  $L$  в плоскости 1-2,  $\varphi$  — угол вокруг оси 1, а  $\chi$  — угол с  $x$  (рис. 5.3). Следовательно,

$$\{L_3, \varphi\} = \{L, \chi\} = -1, \quad \{L_3, \chi\} = \{L, \varphi\} = 0, \quad (5.3.7)$$

поскольку вращение вокруг оси  $z$  уменьшает угол  $\varphi$  и оставляет угол  $\chi$  неизменным, в то время как вращение вокруг  $L$  не затрагивает угол  $\varphi$ , но изменяет угол  $\chi$  (см. задачу (5.3.15,5)).

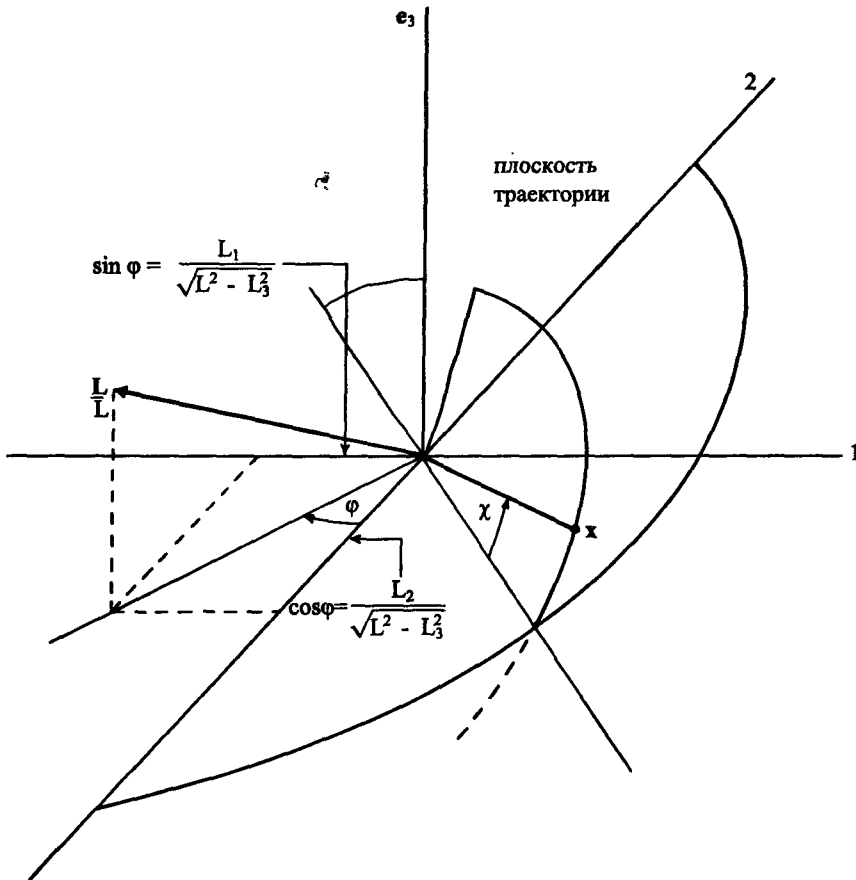


Рис. 5.3. Переменные действие-угол

В качестве третьей пары канонических переменных можно выбрать  $r$  и  $p_r = x \cdot p/r$ . Это не переменные угол-действие, но их скобки Пуассона с величинами (5.3.7) равны нулю. Так как  $r$  и  $p_r$  вращательно инвариантны, то их скобки Пуассона со всеми  $L$  равны нулю, и нам остается лишь проверить, что  $\{p_r, \chi\} = 0$ . Но в этом нетрудно убедиться, если заметить, что  $rp_r = (xp)$  порождает растяжение (4.1.13,3), относительно которого  $L$  и  $x/r$  инвариантны. В этих переменных  $H$  записывается в виде (см. (4.2.12))

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \right) + \frac{\alpha p^0}{rm} - \frac{\alpha^2}{2mr^2}. \quad (5.3.8)$$

Сопряженные с  $\varphi$ ,  $\chi$  и  $r$  переменные действия (определяемые соотношениями (3.3.14))

существуют при  $H < 0$ ,  $L > \alpha$  и имеют вид (см. задачу (5.3.15,1))

$$I_\varphi = L_z, \quad I_\chi = L, \quad I_r = \frac{1}{2\pi} \oint dr p_r = -\sqrt{L^2 - \alpha^2} + \frac{\alpha p^0}{2} \sqrt{\frac{2}{m|H|}}. \quad (5.3.9)$$

Это позволяет легко выразить  $H$  через переменные действия

$$H = -\frac{\alpha^2 p^{02}}{2m(I_r + \sqrt{L^2 - \alpha^2})^2} \quad (5.3.10)$$

и в явном виде вычислить частоты (через  $s$ ) (3.3.15,4):

$$\omega_\varphi = 0, \quad \omega_\chi = \frac{\alpha^2 p^{02} L / \sqrt{L^2 - \alpha^2}}{m(I_r + \sqrt{L^2 - \alpha^2})^3}, \quad \omega_r = \frac{\alpha^2 p^{02}}{m(I_r + \sqrt{L^2 - \alpha^2})^3}. \quad (5.3.11)$$

### Примечания (5.3.12)

1. Так как  $\omega_\varphi = 0$  (в силу сохранения углового момента плоскость движения остается неподвижной), то инвариантен даже двумерный тор. Траектория заполняет его всюду плотно, за исключением того случая, когда отношение частот

$$\frac{\omega_\chi}{\omega_r} = \frac{L}{\sqrt{L^2 - \alpha^2}}$$

рационально (траектории замкнуты).

2. В нерелятивистском случае ( $\alpha^2/r^2 \rightarrow 0$ ) отношение  $L/\sqrt{L^2 - \alpha^2}$  равно единице, и существуют инвариантные одномерные торы — кеплеровские траектории. Проекция такой траектории на конфигурационное пространство имеет знакомую форму розетки (рис. 5.4): каждый последующий перигелий сдвинут относительно предыдущего на угол  $2\pi/\sqrt{1 - \alpha^2/L^2}$ , и орбита в общем случае всюду плотно заполняет кольцеобразную область. То, что теперь  $r$  возвращается к своему начальному значению не одновременно с  $\chi$ , связано с релятивистским увеличением массы при движении вблизи центра. Существование второй частоты (с которой прецессирует траектория) приводит в атомной физике к **тонкой структуре спектральных линий** и стало одним из первых эмпирических подтверждений теории относительности.

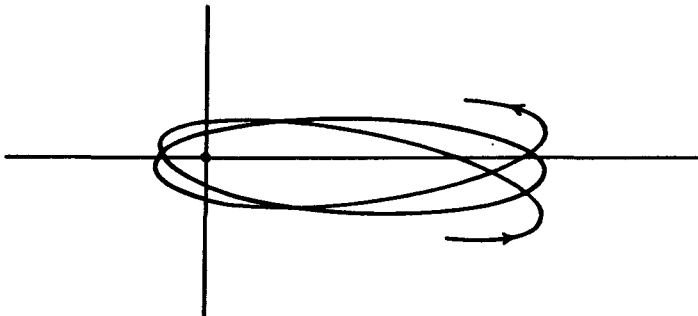


Рис. 5.4. Розетки, описываемые траекториями в релятивистской задаче Кеплера



3. Из (5.3.8) заключаем, что рассматриваемое движение соответствует одномерному движению с эффективным потенциалом

$$\frac{\alpha p^0}{rm} + \frac{L^2 - \alpha^2}{2mr^2}.$$

Если  $\alpha < 0$ ,  $L \leq |\alpha|$ , то потенциал монотонен по  $r$  и частица неизбежно движется по спирали в особую точку, достигая ее за конечное время. Но при  $\alpha > 0$  этого может не произойти, как следует из (5.3.3,3), (см. задачу (5.3.15,4)). Если нас интересует полнота потока  $X_{\mathcal{H}}$ , то в случае притяжения фазовое пространство необходимо редуцировать к

$$T^*(\mathbb{R}^4) \setminus \{(x, p) : L < |\alpha|\}$$

(выбрасывать подмногообразие меньшей размерности становится недостаточно).

### Траектории, уходящие на бесконечность (5.3.13)

Относительно той части фазового пространства, где  $H > 0$ ,  $L > |\alpha|$ , можно доказать следующее:

- (i)  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) = \infty$ ;
- (ii)  $\mathbf{p}, \mathbf{x}/r \in \mathcal{A}$  (см. (3.4.1));
- (iii)  $\exists \Omega_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Omega_{-t} \circ \Omega_t^0$ , если  $\Omega_t^0$  порожден  $H + \alpha^2/2mr^2$  (т.е. чистым потенциалом  $1/r$ ).

### Примечания (5.3.14)

1. Угол рассеяния  $\Theta = \angle(\mathbf{p}_-, \mathbf{p}_+)$  можно явно выразить через постоянные движения (см. задачу (5.3.15,4)), а  $\sigma(\Theta)$  из (3.4.12) — лишь неявно.
2. В силу (5.3.13,iii) в этой части фазового пространства существует максимальное число (пять) постоянных движения. Например, мы могли бы выбрать  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{F} \circ \Omega_{\pm}^{-1} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathbf{F}(t)$ , где  $\mathbf{F}$  определяется соотношением (4.2.4) с  $t \rightarrow p^0$ . Следовательно, при  $H > 0$  (см. (4.2.7)) группой инвариантности остается  $SO(3, 1)$  (см. (3.4.5,3)).

### Задачи (5.3.15)

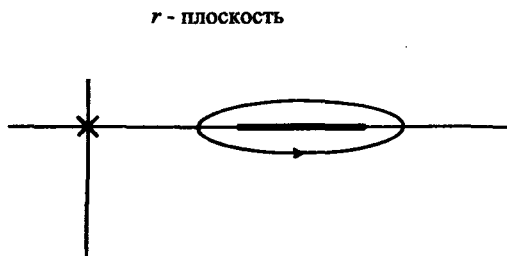
1. Вычислите интеграл (5.3.9) для  $I_r$ .
2. Выразите угловую переменную  $\varphi$ , сопряженную с  $I_r$ , через  $r$  и постоянные движения.
3. Вычислите угол рассеяния  $\Theta$  и покажите, что в пределе больших энергий ( $p^0 \rightarrow \infty$ ,  $L \rightarrow \infty$ ,  $L/p^0 = b = \text{const}$ ) он стремится к нулю.
4. Вычислите при  $\alpha > 0$ , максимум эффективного потенциала  $V_{\text{эф}}$  и покажите, что он больше, чем  $p_{\infty}^2/2m$  ( $p_{\infty} = |\mathbf{p}|$  при  $r = \infty$ ).
5. Проверьте соотношение (5.3.7).

### Решения (5.3.16)

1. Интеграл для  $I_r$  можно представить в виде неопределенного интеграла от элементарных функций (см. задачу (5.3.16,2)), но проще вычислять его как определенный интеграл по комплексной переменной. На комплексной  $r$ -плоскости подынтегральное выражение имеет полюс в нуле и разрез с ветвлением вдоль интервала на вещественной оси, который заключен внутри контура интегрирования (рис.5.5).

Раздувая контур интегрирования, получаем, что интеграл равен сумме вычетов в точках  $r = 0$  и  $r = \infty$ :

$$I_r = -\sqrt{L^2 - \alpha^2} + \frac{\alpha p^0}{2} \sqrt{\frac{2}{m|H|}}.$$

Рис. 5.5. Контур интегрирования в комплексной  $r$ -плоскости

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \int dr \sqrt{2m \left( H - \frac{\alpha p^0}{mr} - \frac{L^2 - \alpha^2}{2mr^2} \right)} = \sqrt{2mHr^2 - 2\alpha p^0 r - L^2 + \alpha^2} + \\ &+ \frac{\alpha p^0}{\sqrt{-2mH}} \arcsin \frac{4mHr - 2\alpha p^0}{\sqrt{4\alpha^2 p^{02} + 4H(L^2 - \alpha^2)}} + \sqrt{L^2 - \alpha^2} \arcsin \frac{2(L^2 - \alpha^2)/r + 2\alpha p^0}{\sqrt{4\alpha^2 p^{02} + 4H(L^2 - \alpha^2)}}, \end{aligned}$$

так как

$$\int dr \sqrt{\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r} + c} = \sqrt{a + br + cr^2} + \frac{b}{2} \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2cr + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} - \sqrt{-a} \arcsin \frac{2a + br}{r\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

и. Поскольку  $dr/d\varphi = \dot{r}/\dot{\varphi} = r^2 p_r/L$ , то получаем

$$\varphi = L \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m \left( H - \frac{\alpha p^0}{rm} - \frac{L^2 - \alpha^2}{2mr^2} \right)}}$$

и при  $u = 1/r$ , имеем

$$\begin{aligned} \pi - \Theta &= 2L \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{2mH - 2\alpha p^0 u - (L^2 - \alpha^2)u^2}} = \\ &= \frac{2L}{\sqrt{L^2 - \alpha^2}} \arccos \left( 1 + \frac{2mH(L^2 - \alpha^2)}{\alpha^2 p^{02}} \right)^{-1/2} \rightarrow 2 \arccos 0 = \pi. \end{aligned}$$

а. Эффективный потенциал  $V_{\text{eff}} = \frac{\alpha p^0}{r} - \frac{\alpha^2}{2mr^2}$  достигает своего максимума  $(p^0)^2/2m$  при  $r = \alpha/p^0$  и, как следует из (5.3.3,3), представим в виде

$$\frac{(p^0)^2}{2m} = \frac{m}{2} + \frac{p_{\infty}^2}{2m},$$

откуда и вытекает требуемое утверждение.

б. Не очевидны только скобки Пуассона  $\{L, \chi\}$ . Вычислим  $\{L, \cos \chi\}$ :

$$\left\{ L, \frac{L_y x - L_x y}{r \sqrt{L^2 - L_z^2}} \right\} = \frac{1}{rL \sqrt{L^2 - L_z^2}} (L_y(L_y z - L_z y) - L_x(L_z x - L_x z)).$$

Имеем  $( ) = L^2 z - L_z(\mathbf{L} \cdot \mathbf{x}) = L^2 z$ , следовательно,

$$\{L, \cos \chi\} = \frac{Lz}{r \sqrt{L^2 - L_z^2}} = \sin \chi.$$

## 5.4. Бетатрон

*Хотя эта задача не интегрируема, все же удается найти не только отдельные траектории, но и (при надлежаще выбранных магнитных полях) эволюцию во времени на многообразиях высокой размерности.*

Бетатрон — одно из гениальнейших применений закона индукции

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.4.1)$$

В основу действия бетатрона положено следующее соображение. Если ток  $\mathbf{j}$  пропустить по петле из проводника, то внутри петли он создаст магнитное поле  $\mathbf{B}$  и тем самым электрическое поле, вращающееся в том же направлении, как ларморовские орбиты в поле  $\mathbf{B}$ , т.е. против  $\mathbf{j}$  (см. задачу (5.4.22,2)). Чтобы установить, когда сила Лоренца компенсирует центробежную силу, проинтегрируем (5.4.1) по окружности радиуса  $a$  вокруг оси  $z$ . Если  $B_z =: B$  зависит только от расстояния до оси  $z$  и времени  $t$ , то

$$E_\varphi = \frac{1}{2\pi a} \oint \mathbf{E} ds = - \int \frac{\partial B}{\partial t} \frac{df}{2\pi a} = - \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \bar{B}, \quad \bar{B} := \frac{1}{\pi a^2} \int df B. \quad (5.4.2)$$

С другой стороны, из (нерелятивистского) уравнения движения следует

$$\frac{d}{dt} mv = eE_\varphi = - \frac{ea}{2} \frac{d}{dt} \bar{B} \quad (5.4.3)$$

или, если частица до включения поля  $B$  находилась в покое,

$$mv = - \frac{ea}{2} \bar{B}. \quad (5.4.4)$$

Таким образом, центробежная и центростремительные силы на круговой траектории уравновешивают друг друга, если

$$\frac{mv^2}{a} = -evB(a) = - \frac{ev}{2} \bar{B} \Rightarrow B(a) = \frac{\bar{B}}{2}, \quad (5.4.5)$$

т.е. если магнитное поле на орбите вдвое меньше своего среднего значения по внутренности круга, ограниченного траекторией. В этом параграфе рассмотрим подробнее теорию, начерченную выше лишь в общих чертах.

### Функция Гамильтона (5.4.6)

Учитывая симметрию задачи, вводим в пространстве цилиндрические координаты, или, точнее, карту  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}$  с координатами  $\rho, \varphi, z$ . Поле  $B(\rho, t)$  в направлении оси  $z$  порождено вектор-потенциалом  $e\mathcal{A}$  с ковариантной  $\varphi$ -компонентой  $A(\rho, t)$ , так что (см. задачу (5.4.22,3))

$$eB_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} A, \quad eE_\varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (5.4.7)$$

Видим, что, как и следует из закона индукции, при включении магнитного поля  $\mathbf{B}$  возникает вращающееся электрическое поле. Движение в расширенном фазовом пространстве описывается функцией Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( p_z^2 + p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} (p_\varphi - A)^2 - p_0^2 \right). \quad (5.4.8)$$

Так как она зависит явно только от  $\rho$  и  $t$  (через  $A$ ), то получаем постоянные движения.

**Постоянные движения (5.4.9)**

$$\dot{p}_\varphi = \dot{p}_z = 0.$$

**Примечания (5.4.10)**

1. Вместе с  $\mathcal{H}$  имеем всего три постоянные движения, что слишком мало для интегрирования задачи. По своей сложности она аналогична плоской ограниченной задаче трех тел, так как для описания движения в координатах  $(\rho, t)$  имеем лишь одну постоянную движения  $\mathcal{H}$ .
2. Мы не хотим искать самое общее решение: бетатрон работает только в том случае, если частицы до того, как включается поле, находятся в состоянии покоя (в большей или меньшей степени). Поэтому рассматриваем только траектории с  $p_\varphi = p_z = 0$ .

**Траектории с  $p_\varphi = p_z = 0$  (5.4.11)**

В этом случае  $A = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = 0$ , так как

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - A}{m\rho^2}; \quad (5.4.12)$$

следовательно,  $p_\varphi = 0$  означает, что частица перед включением  $A$  самое большое двигалась радиально. Тогда имеем уравнение движения по  $\rho$ :

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \quad \ddot{\rho} = \frac{\dot{p}_\rho}{m} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{A^2}{2m^2\rho^2}. \quad (5.4.13)$$

Нетрудно видеть, что  $\rho = a = \text{const}$  — решение, так как при всех  $t$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{A^2(\rho, t)}{2m\rho^2} \right|_a = 0. \quad (5.4.14)$$

**Примечания (5.4.15)**

1. Уравнения (5.4.14) эквивалентны (5.4.5) (см. задачу (5.4.22,4)), поэтому наш наивный подход остается в силе и в релятивистском случае.
2. На практике возникает вопрос о стабильности траектории, поскольку начальные условия, о которых идет речь выше, реализуются не вполне точно. Прежде всего ясно, что движение в направлении оси  $z$  как свободное движение неустойчиво. Ситуацию необходимо исправить, вводя зависимость  $A$  от  $z$  (см. [10]), но останавливаться на этом подробнее не будем. Устойчивость в радиальном направлении зависит от формы  $A$ .

Что касается глубокого изучения вопроса об устойчивости, то воспользуемся правом теоретика предоставлять создание подходящих полей экспериментатору и ограничимся рассмотрением следующего разрешимого примера.

**Пример (5.4.16)**

$$A = \rho \sqrt{\mu^2(\rho - a)^2 + \nu^2 t^2}.$$

Такой вектор-потенциал  $A$  удовлетворяет условию (5.4.14) и порождает поля

$$B_z = \frac{\mu^2(\rho - a)(2\rho - a) + \nu^2 t^2}{\rho \sqrt{\mu^2(\rho - a)^2 + \nu^2 t^2}}, \quad E_\varphi = \frac{-\nu^2 t}{\sqrt{\mu^2(\rho - a)^2 + \nu^2 t^2}}. \quad (5.4.17)$$

Таким образом, на траектории  $\rho = a$  имеем постоянное электрическое и линейно возрастающее по  $t$  магнитное поле. Соответственно, угловая скорость (используем собственное время  $s$ ), как следует из (5.4.12), возрастает линейно по времени (см. задачу (5.4.22,1)):

$$\dot{\varphi}|_{\rho=a} = \frac{p_\varphi - a\nu t}{ma^2}. \quad (5.4.18)$$

Если  $p_z = p_\varphi = 0$ , то

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_\rho^2 - p_0^2 + \mu^2(\rho - a)^2 + \nu^2 t^2). \quad (5.4.19)$$

Следовательно, с точностью до знака  $p_0^2$  снова получаем двумерный гармонический осциллятор. Но теперь располагаем двумя постоянными вкладками  $\rho$  и  $t$  в  $\mathcal{H}$ , и интегрирование не представляет никаких трудностей (коэффициенты определяются соотношением  $1 = \dot{t}^2 - \dot{\varphi}^2 - \dot{\rho}^2$ ):

$$\rho(s) = a + c \sin \frac{\mu}{m}(s - s_0), \quad c = \frac{p_\rho(0)}{\mu}, \quad t(s) = \frac{\sqrt{c^2 \mu^2 + m^2}}{\nu} \operatorname{sh} \frac{\nu}{m} s. \quad (5.4.20)$$

#### Примечания (5.4.21)

1. Если рассматривать только  $\rho$ , то движение устойчиво при условии, что множество  $|\rho - a| < c \quad \forall c \in \mathbb{R}^+$  инвариантно. Но по  $\rho$  и  $t$  (или по  $\rho$  и  $\varphi$ ) движение неустойчиво, так как при сколь угодно малом  $c$  изменения в  $t(s)$  могут быть сколь угодно большими, если только  $s$  достаточно велико.
2. Поскольку для произвольного  $A$  анализ устойчивости труден, то обычно ссылаются на адиабатическую теорему (см. (3.5.20, 6)), “фольклорная” версия которой гласит: если поле включается достаточно медленно, так, что за каждый период интенсивность поля изменяется едва заметно, то в вычислениях магнитное поле можно считать постоянным. Сформулировать адиабатическую теорему точно в такой же форме не представляется возможным, хотя при нашем особом выборе (5.4.16) зависимости от  $\rho$  и  $t$  разделяются и скорость роста  $\nu$  не входит в  $\rho(s)$  (и сказывается только на зависимости между  $s$  и  $t$ ).

#### Задачи (5.4.22)

1. Вычислите скорость  $v = |dx/dt|$  движения по траектории (5.4.20) с  $\rho = a$  и проверьте, что  $|v| < 1$ .
2. Как согласуются упомянутые в начале параграфа 5.4 распределение знаков с приведенным в параграфе 4.1 утверждением о том, что антипараллельные токи сталкиваются?
3. Вычислите в цилиндрической системе координат компоненты векторов  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{E} = -\dot{\mathcal{A}}$ , выраженные через ковариантные компоненты  $A$  вектора  $\mathcal{A}$  (см. (2.5.4)).
4. Докажите эквивалентность (5.4.5) и (5.4.14) (обратите внимание на то, что  $B$  — ортогональная компонента, а  $A$  — ковариантная компонента).

#### Решения (5.4.23)

$$1. v = a \frac{d\varphi}{dt} = a \dot{\varphi}/\dot{t} = -\operatorname{th} \frac{\nu s}{m}.$$

2. См. рис. 5.6.

3. В цилиндрической системе координат  $(z, \rho, \varphi)$  имеем  $g_{ii} = (1, 1, \rho^2)$ , поэтому  $(A_z, A_\rho, A_\varphi) = (A_z, A_\rho, (A_\varphi/\rho))$ . Чтобы вычислить  $\operatorname{rot} \mathcal{A} = {}^*(d\mathcal{A})$ , нам понадобится следующая специализация  $*$ -операции (2.4.33,1):  ${}^*(dA)_i = \varepsilon_{ikj} g^{kl} g^{jm} (dA)_{lm} \sqrt{g}$ ,  $g := \det(g_{ik}) = \rho^2$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} A &= A_z dz + A_\rho d\rho + A_\varphi d\varphi, \\ dA &= (A_{z,\rho} - A_{\rho,z}) d\rho \wedge dz + (A_{\rho,\varphi} - A_{\varphi,\rho}) d\varphi \wedge d\rho + (A_{\varphi,z} - A_{z,\varphi}) dz \wedge d\varphi, \\ {}^*(dA) &= \frac{1}{\rho} \underbrace{(A_{\varphi,\rho} - A_{\rho,\varphi})}_{(\operatorname{rot} \mathcal{A})_z} dz + \frac{1}{\rho} \underbrace{(A_{z,\varphi} - A_{\varphi,z})}_{(\operatorname{rot} \mathcal{A})_\rho} d\rho + \rho \underbrace{(A_{\rho,z} - A_{z,\rho})}_{\rho(\operatorname{rot} \mathcal{A})_\varphi} d\varphi, \end{aligned}$$

что соответствует (5.4.7).

$$4. \bar{B} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a 2\pi\rho d\rho \frac{A_{,\rho}}{\rho} = \frac{2}{a^2} A(a) \text{ и } 0 = \frac{\partial}{\partial\rho} \frac{A}{\rho} \Big|_a = \frac{A_{,\rho}}{\rho} - \frac{A}{\rho^2} \Big|_a = B(a) - \frac{\bar{B}}{2}.$$

Так как постоянная в  $A$  остается произвольной, то можем положить  $A(0) = 0$ .

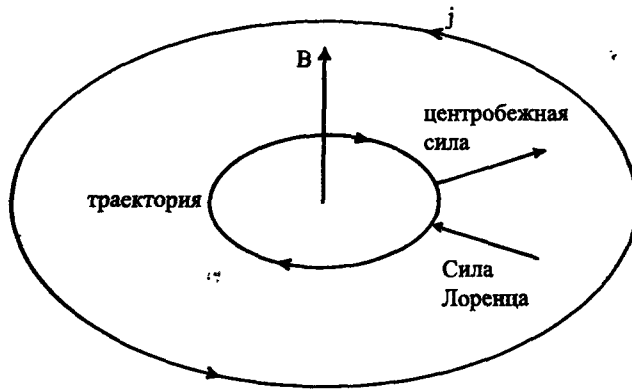


Рис. 5.6. Направления сил в бетатроне

## 5.5. Движение в поле плоского импульса

*Хотя богатая группа инвариантности этой задачи порождает больше постоянных движения, чем требуется для интегрируемости, однако в общем случае, траектория покрывает в пространстве двумерное подмногообразие.*

Классическая теория рассеяния света на заряженной частице занимается изучением ее траектории в световой волне. Поскольку лазерная техника позволяет получать интенсивные световые импульсы, большой интерес представляет решение уравнений движения в поле возмущения, распространяющегося в некотором направлении со скоростью света.

### Поле и функция Гамильтона (5.5.1)

Пусть  $x$  — направление, в котором распространяется поле. Тогда напряженности поля зависят только от комбинации  $t - x$ . Так как мы хотим воспользоваться решениями уравнений Максвелла в пустоте, то  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны друг к другу и к оси  $x$ . Такая ситуация описывается вектором-потенциалом (5.1.7)  $eA = (0, 0, f(t - x), g(t - x))$ . Он порождает поля  $e\mathbf{E} = (0, f', g')$ ,  $e\mathbf{B} = (0, -g', f')$ , и движение в них определяется функцией Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[ (p_y + f)^2 + (p_z + g)^2 + p_x^2 - p_t^2 \right].$$

### Примечания (5.5.2)

1. Оба инварианта  $|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2$  и  $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$  равны нулю. Если  $f'$  и  $g'$  — постоянные, то имеем постоянное поле с нулевыми инвариантами.
2. Предполагаем, что  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Это позволяет нам работать на  $M_e = \mathbb{R}^4$ .

**Группа инвариантности (5.5.3)**

Тензор  $F$ , для выписанного выше электромагнитного поля (5.5.1) инвариантен относительно 5-параметрической подгруппы группы Пуанкаре: так как  $f$  и  $g$  зависят только от  $t-x$ , то тензор  $F$  остается инвариантным при сдвигах в пространственно-подобных направлениях  $y$  и  $z$  и "свето-подобном" направлении  $x+t$ . Кроме того, нетрудно видеть (см. задачу (5.5.14,1)), что комбинированные преобразования Лоренца и вращения, порожденные генераторами  $K_z + L_y$  и  $K_y - L_z$ , также оставляют тензор  $F$  инвариантным. Таким образом, тензор электромагнитного поля  $F$  инвариантен относительно группы, порожденной генераторами  $p_y, p_z, p_x + p_t, K_z + L_y, K_y - L_z$  (см. задачу (5.5.14,2)). Однако не все из этих преобразований оставляют инвариантным вектор-потенциал  $A$  и, следовательно, функцию Гамильтона  $\mathcal{H}$ . Так как многообразие  $M_e$  звездобразно, то примечание (5.1.10,3) остается в силе, и вектор-потенциал  $A$  при этом самое большее может подвергнуться калибровочному преобразованию. Действительно, как показывают вычисления (см. задачу (5.5.14,1)), при двух последних преобразованиях Лоренца вектор-потенциал  $A$  подвергается лишь калибровочным преобразованиям, порождаемым функциями

$$\Lambda_g = \int_0^{t-x} du g(u) \quad \text{и} \quad \Lambda_f = \int_0^{t-x} du f(u).$$

Это приводит к следующим постоянным движениям.

**Постоянные движения в поле плоского импульса (5.5.4)**

$$p_y, \quad p_z, \quad p_x + p_t, \quad K_z + L_y + \Lambda_g = p_z(t-x) + z(p_t + p_x) + \int_0^{t-x} du g(u),$$

$$K_y - L_z + \Lambda_f = p_y(t-x) + y(p_t + p_x) + \int_0^{t-x} du f(u).$$

**Примечания (5.5.5)**

1. Порождаемая пятью постоянными движениями группа изоморфна группе инвариантности поля (см. задачу (5.5.14,2)).
2. Скобки Пуассона от любых двух величин  $p_y, p_z, p_x + p_t$  равны нулю, поэтому вместе с  $\mathcal{H}$  имеем четыре необходимые для интегрируемости постоянные движения.
3. Вместе с  $\mathcal{H}$  имеем всего шесть постоянных движений. Таким образом, чтобы полностью задать траекторию в  $T^*(M_e)$ , нам недостает еще одной. Последняя постоянная движения возникает при интегрировании: выбрав начало отсчета  $s$  в точке пересечения траектории с плоскостью  $(t, x)$ , заключаем из

$$\frac{d}{ds}(t-x) = -\frac{p_t + p_x}{m} =: \alpha > 0,$$

что (точка  $s = 0$  по предположению выбрана так, чтобы  $u(0) = 0$ )

$$t(s) - x(s) = \alpha s.$$

Если воспользоваться  $\mathcal{H} = -m/2$ , то

$$\frac{d}{ds}(t+x) = \frac{p_x - p_t}{m} = \alpha^{-1} \left[ 1 + \frac{(p_y + f)^2 + (p_z + g)^2}{m^2} \right],$$

$$t(s) + x(s) = 2t(0) + \alpha^{-2} \int_0^{\alpha s} du \left[ 1 + \frac{(p_y + f(u))^2 + (p_z + g(u))^2}{m^2} \right].$$

Резюмируя полученные результаты, приходим к следующему решению.

**Явное решение для координат как функций собственного времени (5.5.6)**

$$t(s) = t(0) + \frac{s}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \alpha \right) + \frac{1}{2m^2\alpha^2} \int_0^{\alpha s} du \left[ (p_y + f(u))^2 + (p_z + g(u))^2 \right],$$

$$x(s) = x(0) + \frac{s}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \alpha \right) + \frac{1}{2m^2\alpha^2} \int_0^{\alpha s} du \left[ (p_y + f(u))^2 + (p_z + g(u))^2 \right],$$

$$y(s) = y(0) + s \frac{p_y}{m} + \frac{1}{m\alpha} \int_0^{\alpha s} du f(u), \quad z(s) = z(0) + s \frac{p_z}{m} + \frac{1}{m\alpha} \int_0^{\alpha s} du g(u).$$

Так как до максимального числа нам недостает одной постоянной движения, то траектории в общем случае описывают на плоскости  $(x, y)$  конфигурации, напоминающие фигуры Лиссажу.

**Пример (5.5.7)**

При суперпозиции двух плоских волн

$$\begin{aligned} f &= A_1 \cos \omega_1 u, & g &= A_2 \cos(\omega_2 u + \delta), \\ e\mathbf{E} &= (0, -A_1 \omega_1 \sin \omega_1 u, -A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 u + \delta)), \\ e\mathbf{B} &= (0, A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 u + \delta), -A_1 \omega_1 \sin \omega_1 u), \end{aligned}$$

решение (5.5.6) может быть вычислено следующим образом (при  $x(0) = t(0)$ ):

$$\left. \begin{aligned} t(s) \\ x(s) \end{aligned} \right\} = t(0) + \frac{s}{2} \left( \frac{1}{\alpha} \pm \alpha + \frac{p_y^2 + p_z^2}{m^2} \right) + \frac{p_y A_1}{\omega_1 \alpha^2 m^2} \sin \omega_1 \alpha s + \frac{p_z A_2}{\omega_2 \alpha^2 m^2} (\sin(\omega_2 \alpha s + \delta) - \sin \delta) +$$

$$+ \frac{A_1^2 + A_2^2}{4m^2 \alpha} s + \frac{A_1^2}{8\alpha^2 m^2 \omega_1} \sin 2\omega_1 \alpha s + \frac{A_2^2}{8\alpha^2 m^2 \omega_2} (\sin 2(\omega_2 \alpha s + \delta) - \sin 2\delta), \quad (5.5.8)$$

$$y(s) = y(0) + s \frac{p_y}{m} + \frac{A_1}{\omega_1 \alpha m} \sin \omega_1 \alpha s,$$

$$z(s) = z(0) + s \frac{p_z}{m} + \frac{A_2}{\omega_2 \alpha m} (\sin(\omega_2 \alpha s + \delta) - \sin \delta).$$

В случае рационально независимых частот  $\omega$  траектории на плоскости  $(y, z)$  всюду плотно заполняют двумерную область.

**Частные случаи (5.5.9)**

1. **Циркулярно поляризованные волны:**  $A_1 = A_2 = A$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\delta = \pi/2$ . Группа инвариантности поля расширяется на один параметр, и возникает одна дополнительная постоянная движения (см. задачу (5.5.14,3)):

$$2L_x + (p_x - p_t)/\omega. \quad (5.5.10)$$



Решение, соответственно, упрощается до следующего (для  $x^\beta(0) = 0$ ):

$$\begin{cases} t(s) \\ x(s) \end{cases} = \frac{s}{2\alpha} \left( 1 \pm \alpha^2 + \frac{A^2 + p_y^2 + p_z^2}{m^2} \right) + \frac{A}{m^2 \alpha^2 \omega} (p_y \sin \omega \alpha s + p_z (\cos \omega \alpha s - 1)),$$

$$y(s) = \frac{A}{\omega \alpha m} \sin \omega \alpha s + s \frac{p_y}{m}, \quad z(s) = \frac{A}{\omega \alpha m} (\cos \omega \alpha s - 1) + s \frac{p_z}{m}. \quad (5.5.11)$$

При  $p_y = p_z = 0$  частица описывает в плоскости, перпендикулярной волне, круговую траекторию, так что скорость частицы имеет одинаковое направление с  $\mathbf{B}$  и перпендикулярна  $\mathbf{E}$  (рис. 5.7).

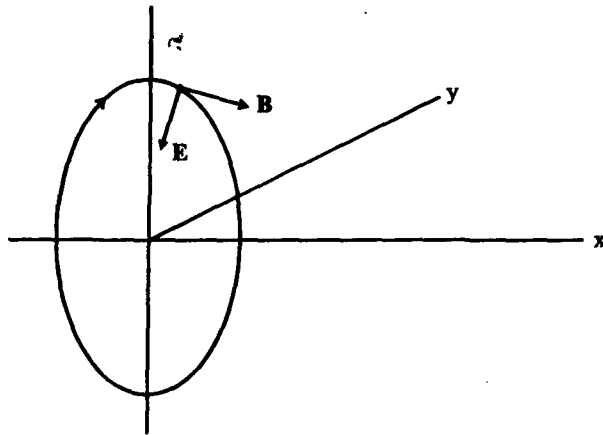


Рис. 5.7. Циркулярно поляризованная волна

**2. Линейно поляризованные волны:**  $A_2 = 0$ . При  $p_y = p_z = y(0) = z(0) = t(0) = 0$  движение происходит по замкнутой траектории, напоминающей по форме восьмерку (рис. 5.8):

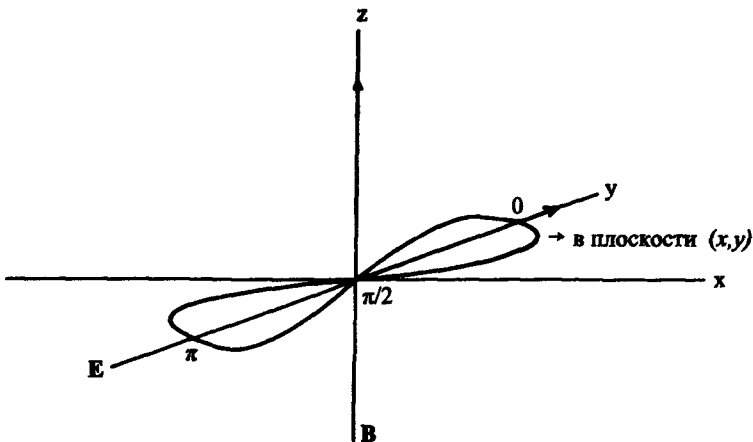


Рис. 5.8. Движение в линейно поляризованной волне

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} t(s) \\ x(s) \end{Bmatrix} &= \frac{s}{2\alpha} \left( 1 \pm \alpha^2 + \frac{A^2}{2m^2} \right) + \frac{A^2}{8\alpha^2 m^2 \omega} \sin 2\omega\alpha s, \\ y(s) &= \frac{A}{\omega\alpha m} \sin \omega\alpha s, \quad z(s) = 0. \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

**Примечание (5.5.13)**

Чтобы понять, как возникает такое движение, вспомним, о чем говорилось в параграфе 5.2: при таком же расположении векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , но постоянном поле, траектория выглядела так, как показано на рис. 5.9. При меньших значениях  $y$  частица имеет меньшую скорость и поэтому меньший ларморовский радиус. В плоской волне после того как частица проходит через начало, поля начинают менять направления, и частица описывает вторую половину траектории, которая является зеркальным отражением первой.

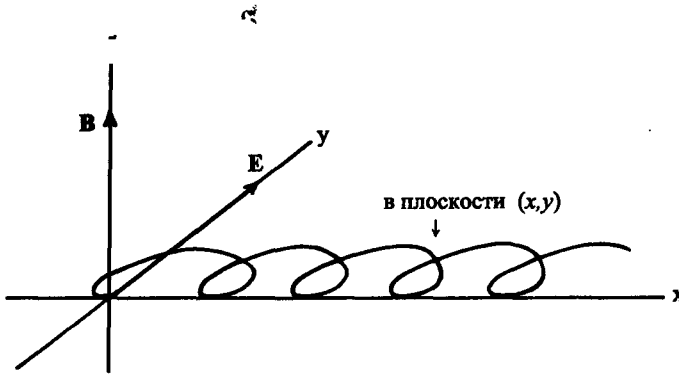


Рис. 5.9. Движение в постоянном поле

**Задачи (5.5.14)**

1. Вычислите изменения вектора-потенциала  $A$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  при инфинитезимальном преобразовании, порожденном  $K_z + L_y$ . Какое изменение это вызовет в выражениях (5.5.1)?
2. Вычислите скобки Пуассона для генераторов группы Пуанкаре, оставляющих инвариантными тензор электромагнитного поля  $F$ , и группу инвариантности функции Гамильтона  $\mathcal{H}$ .
3. Покажите, что при  $A = (0, 0, \cos(t - x), -\sin(t - x))$  и  $\omega = 1$  величина (5.5.10) — постоянная. Убедитесь в том, что скобки Пуассона постоянной (5.5.10) с другими постоянными могут быть выражены через эти другие постоянные.

**Решения (5.5.15)**

1. Пусть  $\epsilon$  — бесконечно малый параметр. Тогда из (5.2.6), (5.2.7) при соответствующем преобразовании координат получаем

$$\begin{aligned} A &\rightarrow (A_0 + \epsilon A_3, A_1 - \epsilon A_3, A_2, A_3 + \epsilon(A_0 + A_1)), \\ \mathbf{E} &\rightarrow (E_1 - \epsilon(E_3 + B_2), E_2 + \epsilon B_1, E_3 + \epsilon E_1), \\ \mathbf{B} &\rightarrow (B_1 + \epsilon(E_2 - B_3), B_2 - \epsilon E_1, B_3 + \epsilon B_1). \end{aligned}$$

Для (5.5.1) это означает, что  $A \rightarrow A + \epsilon d\Lambda$ , где  $\Lambda = \int_0^{t-x} du g(u)$ , а  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  остаются неизменными.

2.  $\{K_z + L_y, p_x\} = p_t + p_x = \{K_y - L_x, p_y\} = \{K_z + L_y + \Lambda_g, p_x\} = p_t + p_x = \{K_y - L_x + \Lambda_f, p_y\}$ .
3.  $\{(p_y + \cos(t - x))^2, 2L_x + p_x - p_t\} = 4(p_y + \cos(t - x))(-p_x + \sin(t - x)) = -\{(p_x - \sin(t - x))^2, 2L_x + p_x - p_t\}$ .

## 5.6. Релятивистское движение в гравитационном поле

*Хотя в нерелятивистском пределе уравнения движения очень похожи на уравнения электродинамики, однако в своем точном виде они имеют простую геометрическую интерпретацию.*

Чтобы привыкнуть к кажущейся достаточно сложной системе уравнений (1.1.6), (1.1.7) и сравнить их с электромагнитным аналогом (1.1.4), рассмотрим движение в поле массивной частицы.

### Нерелятивистский предел (5.6.1)

Под нерелятивистским пределом понимаем, во-первых,  $\|dx/dt\| \ll 1$ , но с сохранением членов первого порядка по  $dx/dt$ . С другой стороны, гравитационное поле должно быть слабым, т.е. должно выполняться равенство:  $g_{\alpha\beta} = (\eta_{\alpha\beta} \text{ из (5.1.2)}) + \text{малая величина}$ . При этих условиях  $s$  можно отождествить с  $t$  (см. (5.6.6,3)), и  $g_{\alpha\beta}^{-1} = \eta_{\alpha\beta}$  — та же самая величина. Из теории поля известно, что “малая” масса  $M$ , движущаяся в начале координат со скоростью  $\mathbf{j}$ ,  $\|\mathbf{j}\| \ll 1$ , создает в точке  $\mathbf{x}$ ,  $\|\mathbf{x}\| = r \gg M\kappa$ , гравитационный потенциал

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{4M\kappa}{r} \left( j_\alpha j_\beta + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \right), \quad (j_\alpha) = (-1, v_1, v_2, v_3). \quad (5.6.2)$$

В рассматриваемом приближении при подстановке (5.1.2) в (1.1.6) и (1.1.7) (см. задачу (5.6.13,1)) получаем уравнения движения

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -M\kappa \frac{\mathbf{x}}{r^3} - \frac{4M\kappa}{r^3} \left[ \frac{d\mathbf{x}}{dt} \wedge [\mathbf{j} \wedge \mathbf{x}] \right]. \quad (5.6.3)$$

### Примечания (5.6.4)

1. Масса частицы  $m$ , движущейся в гравитационном поле, не входит в (5.6.3), следовательно, открытие Галилея (установившего, что тела с различной массой одинаково ведут себя в гравитационном поле) имеет универсальное значение.
2. К ньютоновскому слагаемому теперь добавляется зависящая от скорости сила типа лоренцевской (5.1.4,2). Эти два члена действуют в противоположные стороны, как в электродинамике: массы с одинаковыми знаками притягиваются, токи масс одного знака отталкиваются. Это принято интерпретировать, как проявление **принципа Маха**. Например, если тело во вращающемся полом цилиндре вращается в том же направлении, что и сам цилиндр, то силы между токами масс действуют внутри цилиндра против центробежной силы (**эффект Ханса Тирринга**)<sup>16</sup>. Если бы во Вселенной не было ничего другого, то, согласно принципа Маха, в случае равных угловых скоростей не было бы центробежной силы, так как утверждение о том, что два тела вращаются, было бы лишено смысла.
3. В параграфе 5.7 мы увидим, как изменится (5.6.3) при  $r < M\kappa$  и  $\|dx/dt\| \sim 1$ .

Чтобы мы могли рассмотреть (1.1.6) и (1.1.7) в рамках использовавшегося выше формализма, запишем их в лагранжевой форме.

<sup>16</sup>В электродинамике центробежная сила, действующая на внутренний ток, компенсируется, когда внешний ток течет в противоположном направлении (как в бетатроне).

**Лагранжева форма уравнений движения (5.6.5)**

Для функции Лагранжа

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta}(x(s))$$

уравнения Эйлера ((2.3.20) с  $s$  вместо  $t$  и  $i = 0, 1, 2, 3$ ) совпадают с уравнениями (1.1.6) и (1.1.7).

**Доказательство:** см. задачу (5.6.13,2).

**Примечания (5.6.6)**

1. Множитель  $m/2$  является несущественным и служит лишь для того, чтобы воспроизвести при  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$  выражение (5.1.11).
2. В отличие от (5.1.3) мы не можем требовать нормировку (5.1.1,ii) (т.е.  $\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \eta_{\alpha\beta} = -1$ ), так как эти величины не зависят от  $s$ . Кроме того, в рассматриваемом случае угловой момент  $L$  сам является постоянной движения; он квадратичен по  $\dot{x}$  и совпадает с  $\mathcal{H}$ . Поэтому  $s$  будем нормировать с помощью соотношения  $\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta g_{\alpha\beta} = -1$ .
3. Соображения (5.1.20,2) перестают быть верными, и неравенство  $\|dx/dt\| < 1$  не следует из уравнений движения (см. 5.1.19,3). Например, в гравитационном потенциале (5.6.2) с  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$  имеем

$$\dot{t}^2 \left(1 - \frac{2M\kappa}{r}\right) - |\dot{\mathbf{x}}|^2 \left(1 + \frac{2M\kappa}{r}\right) = 1$$

или

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\|^2 < \left(1 - \frac{2M\kappa}{r}\right) \left(1 + \frac{2M\kappa}{r}\right)^{-1}.$$

В этом случае также существует предельная скорость, но через  $g_{\alpha\beta}$  она зависит от  $x$  и не должна всегда быть меньше единицы, как в рассмотренном пределе. Это утверждение может вызывать определенное беспокойство, поскольку звучит оно так, словно гравитационное поле может ускорять тела до сверхсветовых скоростей. В ответ на подобные опасения следует заметить, что предельная скорость существует одна и та же для всех частиц различной массы, в том числе и для фотонов. Как будет показано в дальнейшем,  $x$  и  $t$  не дают длин и продолжительностей, измеренных с помощью реальных мерных линеек и часов. Если же длины и продолжительности измерять в единицах, в которых скорость света равна единице, то предельная скорость также равна единице.

4. В нерелятивистском пределе  $\dot{x}_0 \rightarrow 1$  угловой момент  $L \rightarrow m(g_{00}/2 + \dot{\mathbf{x}}/2)$ , поэтому  $-g_{00}/2$  играет роль гравитационного потенциала.

От (5.6.5) с учетом (2.3.22) непосредственно приходим к функции Гамильтона.

**Функция Гамильтона уравнений движения (5.6.7)**

Функция Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta}(x), \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma,$$

порождает локальный канонический поток, соответствующий уравнениям (1.1.6) и (1.1.7).

**Примечания (5.6.8)**

1. Компоненты  $g$  должны принадлежать по меньшей мере  $C^1$ ; там же, где они имеют особенность, либо необходимо перейти к другой карте, либо должна быть сужена граница

расширенного конфигурационного пространства. Можем получить даже (глобальный) поток и распространить его на все фазовое пространство или не распространить в зависимости от глобальной структуры этого многообразия.

2. Нормировка (5.6.6,2) соответствует функции Гамильтона  $\mathcal{H} = -m/2$ .

3. Величины  $p/m$  имеют лишь весьма далекое отношение к истинным скоростям:

$$\frac{p_\alpha}{m} = \dot{x}^\beta g_{\beta\alpha}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds},$$

и  $dx/dt$  все еще отличаются от скоростей, измеренных с помощью реальных мерных линеек и часов.

Симметричный ковариантный тензор второго порядка  $g_{\alpha\beta}$  порождает (согласно (2.4.14)) в расширенном конфигурационном пространстве псевдориманову структуру (при этом всегда предполагаем, что  $g$  имеет три положительных и одно отрицательное собственные значения). С помощью  $g$  пространственные и временные интервалы, определенные первоначально чисто формально, обретают универсальность гравитации. Как будет подробно показано в гл. 6, гравитация влияет на мерные линейки и часы таким образом, что  $g$  локально задает реально измеренные интервалы. Более конкретно это означает, что, например, расстояние между точками  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  и  $(x^0, x^1 + dx^1, x^2, x^3)$  в пределе при  $dx^1 \rightarrow 0$  переходит не в  $dx^1$ , а в  $dx^1 \sqrt{g_{11}}$ . Так, в (5.6.2) при  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$  получаем  $g_{00} = -1 + 2M\kappa/r$ ,  $g_{11} = 1 + 2M\kappa/r$ ; следовательно, пространственный и временной интервалы, измеренные в этой точке с помощью реальных часов и мерной линейки, равны, соответственно,  $dt \sqrt{1 - 2M\kappa/r}$ ,  $dx^1 \sqrt{1 + 2M\kappa/r}$ , что дает предельную скорость (5.6.6,3), равную единице. Но при  $r \rightarrow \infty$  истинные интервалы задаются величинами  $dt \equiv dx^0$  и  $dx^1$ ; поэтому создается впечатление, что при малых  $r$  под действием гравитации мерные линейки сокращаются, а часы замедляют ход. Однако нет идеальных часов и мерных линеек, которые могли бы измерять при малых  $r$  непосредственно  $dt$  и  $dx$ , поскольку гравитация одинаково действует на все явления. Поэтому имеет смысл говорить только о метрической структуре, определяемой  $g$  (а не  $\eta$ ). Если  $ds^2 = -dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta} > 0$ , то точки  $x^\alpha$  и  $x^\alpha + dx^\alpha$  разделены времениподобным интервалом и  $ds$  имеет, соответственно, смысл собственного времени: это временной интервал, измеренный по часам, движущимся от  $x^\alpha$  в  $x^\alpha + dx^\alpha$ , в системе покоя которых отлична от нуля только величина  $dx^0$ . Такое измерение времени придает смысл геодезической форме уравнений движения (5.6.9).

### Геодезическая форма уравнений движения (5.6.9)

Уравнения (1.1.6) и (1.1.7) — это уравнения Эйлера для вариационного принципа

$$W = \int ds \sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}, \quad DW = 0.$$

**Доказательство:** см. задачу (5.6.13,3).

### Примечания (5.6.10)

1. Более точно  $W$  определяется следующим образом. Пусть  $u$  и  $v$  — две точки расширенного конфигурационного пространства, такие, что существует траектория  $x(s_0) = u$ ,  $x(s_1) = v$  с

$$g_{\alpha\beta}(x(s)) \dot{x}^\alpha(s) \dot{x}^\beta(s) < 0 \quad \forall s_0 \leq s \leq s_1.$$

Для всех траекторий, удовлетворяющих этим условиям,  $W$  определяется приведенным выше интегралом, т.е. дает величину  $s_1 - s_0$ . При этом выбор  $s$  не играет никакой роли: при замене  $s \rightarrow \bar{s}(s)$ , где  $\bar{s}$  — монотонная дифференцируемая функция,  $W$  не меняется.

2. Согласно предыдущему примечанию  $W$  есть не что иное, как разность показаний часов, движущихся вдоль  $x(s)$ .
3. Чтобы убедиться в том, что требование стационарности дает экстремум, рассмотрим сначала случай  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ . Пусть  $u = (0, 0, 0, 0)$ . Выберем систему координат так, чтобы  $v = (t_1, 0, 0, 0)$ . Тогда

$$W = \int_0^{t_1} dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Ясно, что  $0 < W \leq t_1$ ; максимум достигается траекторией  $x(s) = (s, 0, 0, 0)$ , которая удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа  $\ddot{x} = 0$ . Инфимум 0 реально не достигается, но частицы, движущиеся с почти световыми скоростями, собственное время которых  $s = t \sqrt{1 - (dx/dt)^2}$  течет очень медленно, могут сколь угодно близко подходить к инфимуму. В общем случае  $g$  в любой точке с помощью подходяще выбранных координат можно привести к виду  $\eta$  (см. (5.6.11)), поэтому траектория, удовлетворяющая уравнениям Эйлера-Лагранжа, всегда доставляет локальный максимум собственному времени, если точки  $u$  и  $v$  расположены достаточно близко друг от друга. Если же  $u$  и  $v$  расположены далеко друг от друга, то максимум достигается не обязательно (см. (5.7.17,1)).

4. Пользуясь математической терминологией, можем называть траектории **временноподобными геодезическими (линиями)** в расширенном конфигурационном пространстве с псевдоримановой структурой, индуцированной  $g$ .

При переходе к новым координатам  $x \rightarrow \bar{x}$  величина  $g$ , как следует из определения (2.4.36), преобразуется как тензор второго ранга:

$$g_{\alpha\beta}(\bar{x}) \rightarrow g_{\gamma\delta}(x) \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\beta}.$$

Поэтому  $g_{\alpha\beta} \neq \eta_{\alpha\beta}$  и может представлять  $\eta_{\alpha\beta}$  только на другой карте, но отнюдь не соответствовать истинному гравитационному полю. Величины  $\Gamma$  в уравнениях движения (1.1.6) оказываются сплошь фиктивными силами, поскольку они возникают при переходе к ускоренной системе отсчета. В электродинамике мы познакомились с калибровочным потенциалом  $A_i = \Lambda_{,i}$ , который не порождает никакого поля. Здесь же существуют  $g$ , поэтому уравнения, даже если их записать в других координатах, приводят к свободному движению. В теории поля встретим критерии, позволяющие судить, в каких случаях  $g_{\alpha\beta}$  совпадают с преобразованными  $\eta_{\alpha\beta}$ . При этом подразумеваем, что  $g$  рассматривается на всем многообразии, так как в каждой точке выполняется принцип эквивалентности.

### Принцип эквивалентности (5.6.11)

$\forall x \in M_e$  можно найти координаты, такие, что в этой точке  $g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta}$  и  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) = 0$  (величины  $\Gamma$  определены в (1.1.7)).

**Доказательство:** см. задачу (5.6.13,4).

### Примечания (5.6.12)

1. В этих координатах (так называемых **римановых нормальных координатах**) фиктивные силы компенсируют в точке  $x$  силу тяжести (гравитацию). На практике такая компенсация происходит в падающем лифте. Пассажир такого лифта не обнаруживает никакой гравитации, так как в гравитационном поле все тела независимо от их массы или каких-либо других свойств падают с одинаковым ускорением.

2. В (3.2.15,1) мы устранили постоянное гравитационное поле, перейдя в ускоренную систему отсчета. Член, соответствующий в (5.6.3) силе Лоренца, во вращающейся системе отсчета (3.2.15,2) может быть скомпенсирован силой Кориолиса.
3. В соседних точках величины  $\Gamma$  отличны от нуля, поэтому принцип эквивалентности выполняется лишь в бесконечно малом. Что же касается гравитации, то детектировать можно только градиент поля — приливную силу.

#### Задачи (5.6.13)

1. Используя уравнения (1.1.6), (1.1.7) и (5.6.2), выведите уравнения (5.6.3).
2. Выведите уравнения Эйлера для  $L$  из (5.6.5).
3. Покажите, что (1.1.6), (1.1.7) удовлетворяют уравнениям Эйлера из (5.6.9).
4. Докажите принцип эквивалентности (5.6.11).

#### Решения (5.6.14)

1. Так как производные от  $g$  — величины первого порядка по  $\kappa$ , то можем в этом порядке положить  $(g^{-1})_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ , и поскольку  $\alpha$  — пространственный индекс, поэтому получаем ( $x^0 = 0$ )

$$\begin{aligned}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha}) = \\ &= -\frac{2M\kappa}{r^3} \left\{ \left( j_{\alpha} j_{\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \right) x^{\gamma} + \left( j_{\alpha} j_{\gamma} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\gamma} \right) x^{\beta} - \left( j_{\beta} j_{\gamma} + \frac{1}{2} \eta_{\beta\gamma} \right) x^{\alpha} \right\}.\end{aligned}$$

В нерелятивистском приближении имеем ( $\alpha = 1, 2, 3$ )

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{dt^2} = -\Gamma_{00}^{\alpha} - 2\Gamma_{0\beta}^{\alpha} \frac{dx^{\beta}}{dt} = \frac{M\kappa}{r^3} \left\{ -x^{\alpha} - 4 \frac{dx^{\beta}}{dt} (j_{\alpha} x_{\beta} - j_{\beta} x_{\alpha}) \right\}.$$

Именно это и утверждается в (5.6.3).

2.  $\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = \frac{d}{ds} (m \dot{x}^{\beta} g_{\alpha\beta}(x)) = m \left\{ \ddot{x}^{\beta} g_{\alpha\beta} + \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta}) \right\} = \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} = m \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} g_{\beta\gamma,\alpha}$ .
3. В общем случае функция  $f(L)$  порождает уравнение Эйлера

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \right) = \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}}.$$

Как следует из (5.6.8,2),  $L$  и, следовательно,  $\partial f / \partial L$  для решений уравнений Эйлера (5.6.5) не зависят от  $s$ . Тем самым эквивалентность (5.6.5) и (5.6.9) доказана.

4. Выберем сначала рассматриваемую точку  $x$  в начале координат. Симметричную матрицу  $g_{\alpha\beta}(0)$  можно привести ортогональным преобразованием к диагональному виду, а скалярными преобразованиями собственные значения можно нормировать на  $\pm 1$ . В силу принятых нами предположений относительно допустимых  $g$ , приходим к равенству  $g_{\alpha\beta}(0) = \eta_{\alpha\beta}$ . Если разложить  $g$  в ряд

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta\gamma} x^{\gamma} + O(x^2),$$

то замена карт  $x^{\gamma} = \bar{x}^{\gamma} + \frac{1}{2} c_{\alpha\beta}^{\gamma} \bar{x}^{\alpha} \bar{x}^{\beta}$  приводит к преобразованной метрике

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta} &= (\eta_{\gamma\delta} + A_{\gamma\delta\rho} \bar{x}^{\rho}) (\delta^{\gamma}_{\alpha} + c_{\alpha\sigma}^{\gamma} \bar{x}^{\sigma}) (\delta^{\delta}_{\beta} + c_{\beta\sigma}^{\delta} \bar{x}^{\sigma}) + O(x^2) = \\ &= \eta_{\alpha\beta} + \bar{x}^{\sigma} (A_{\alpha\beta\sigma} + c_{\beta\alpha\sigma} + c_{\alpha\beta\sigma}) + O(x^2).\end{aligned}$$

Если  $c_{\alpha\beta\sigma} := \eta_{\alpha\tau} c_{\beta\sigma}^{\tau} = -\frac{1}{2} A_{\alpha\beta\sigma}$ , то линейный член выпадает в силу того что  $A_{\alpha\beta\sigma} = A_{\beta\alpha\sigma}$ . Заметим, что приведенное выше квадратичное преобразование координат содержит в качестве частного случая ускоренную систему отсчета, с помощью которой мы в нерелятивистском приближении (3.2.15) избавились от гравитации.

## 5.7. Движение в поле Шварцшильда

*Релятивистское движение в гравитационном поле материальной точки по структуре группы инвариантности совпадает с движением в аналогичном электромагнитном поле. Но при малых  $r$  происходит немало физически замечательного.*

Вскоре после того, как Эйнштейн опубликовал свои полевые уравнения для гравитации, молодой, но уже отмеченный печатью смерти, физик нашел точное решение, описывающее поле материальной точки. Даже такой простой случай позволил обнаружить существенные патологии релятивистской теории гравитации и поэтому имеет огромное значение для физики и астрономии. Речь идет о так называемом решении Шварцшильда.

### Решение Шварцшильда (5.7.1)

Компоненты  $g_{\alpha\beta}$ , порожденные массой  $M$  в начале координат, задают в пространственных полярных координатах  $(t, r, \vartheta, \varphi)$  расширенного конфигурационного пространства псевдометрику

$$g = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2, \quad r_0 := 2M\kappa.$$

### Примечания (5.7.2)

1. Здесь  $r_0$  — радиус, при котором гравитационная энергия массы сравнима по порядку величины с ее энергией покоя:  $M\kappa/r_0 \sim mc^2$  (в (5.7.1) используются единицы, в которых  $c = 1$ ). Согласно (1.1.3) для протона  $2m_p\kappa/c^2 \sim 10^{-52}$  в единицах СГС, Земля содержит около  $10^{51}$  протонов, поэтому  $r_0 \sim$  мм. Масса Солнца примерно в миллион раз больше, поэтому для Солнца  $r_0 \sim$  км.
2. При  $r \rightarrow \infty$  получаем (5.6.2) и  $g_{\alpha\beta} \rightarrow \eta_{\alpha\beta}$ , и координаты соответствуют реально измеренным расстояниям (см. задачу (5.7.17,4)).
3. При  $r = r_0$  получаем  $g_{00} = 0$ . Но это отнюдь не означает, что происходит нечто необыкновенное: при  $r = 0$  получаем в сферических координатах  $g_{\vartheta\vartheta} = g_{\varphi\varphi} = 0$ . Но все сводится просто к тому, что выбранная карта становится неприменимой.
4. Более серьезной представляется особенность компоненты  $g_{rr}$  при  $r = r_0$ . Например, если на окружности  $x^2 + y^2 = 1$  воспользоваться координатой  $x$ , то линейный элемент  $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2/(1 - x^2)$  будет иметь особенность в точках  $x = \pm 1$ . Однако эти точки ничем не хуже других, но выбранная карта в них “не действует”.
5. Если вместо  $(t, r)$  ввести координаты

$$u = \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} e^{r/2r_0} \operatorname{ch} \frac{t}{2r_0}, \quad v = \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} e^{r/2r_0} \operatorname{sh} \frac{t}{2r_0},$$

то метрика примет вид (см. задачу (5.7.17,3))

$$g = \frac{4r_0^3}{r} e^{-r/r_0} (du^2 - dv^2) + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2),$$

и особенность в точке  $r_0$  исчезнет (“разрешится”). Область  $\{r > r_0, -\infty < t < \infty\}$  старой карты отобразится на  $I = \{|v| < u\}$  (рис. 5.10). Но при этом завоевывается “новая территория”, и решение удастся продолжить до  $r = 0$ : обращение преобразования

$$t = 2r_0 \operatorname{arth} \frac{v}{u}, \quad \left(\frac{r}{r_0} - 1\right) e^{r/r_0} = u^2 - v^2$$



показывает, что это область  $u^2 - v^2 > -1$  (рис. 5.11). К вопросу о физическом смысле вновь открытой "территории" мы еще вернемся.

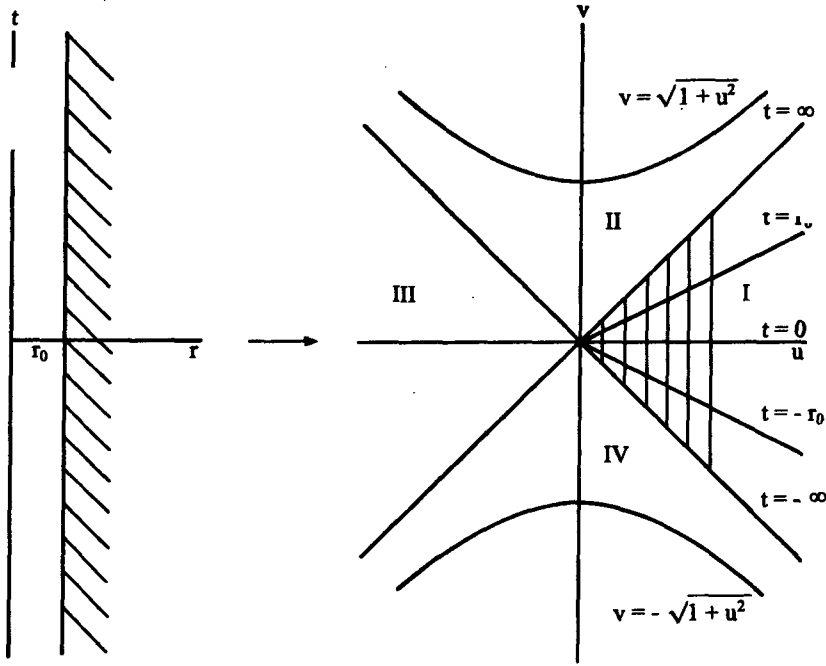


Рис. 5.10. Расширение решения Шварцшильда

Чтобы облегчить сравнение с параграфами 4.2 и 5.3, решим уравнения движения в координатах  $(t, r, \vartheta, \varphi)$ . Координата  $t$  нужна только в области I на рис. 5.10. Что же касается координаты  $r$ , то ее можно использовать и в области II вплоть до  $r = 0$  ( $v = \sqrt{u^2 + 1}$ ). Поэтому требуются вычисления, чтобы найти  $r(s), \vartheta(s), \varphi(s)$ . Подставляя (5.7.1) в (5.6.7), находим функцию Гамильтона.

**Функция Гамильтона (5.7.3)**

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( |\mathbf{p}|^2 - \frac{r_0}{r} p_r^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} p_0^2 \right).$$

Так как  $\mathcal{H}$  кроме импульсов содержит в качестве координат только  $r$ , то получаем постоянные движения.

**Постоянные движения (5.7.4)**

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{ds} [\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}] = 0, \quad \dot{p}_0 = 0, \quad \dot{\mathcal{H}} = 0.$$

Эти постоянные такие же, как в электрической задаче из параграфа 5.3, но приведенное там построение переменных угол-действие необходимо лишь немного изменить: в сферических координатах

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) + \frac{L^2}{r^2} - \frac{p_0^2}{1 - r_0/r} \right) = -\frac{m}{2} \tag{5.7.5}$$

и поэтому (см. (5.6.8,3))  $p_r = \frac{m\dot{r}}{1 - r_0/r}$ . Таким образом, можем записать

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 - \frac{mr_0}{2r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{L^2 r_0}{2mr^3} = \frac{m}{2} \left( \frac{p_0^2}{m^2} - 1 \right) =: E = \text{const.} \quad (5.7.6)$$

Это форма закона сохранения энергии одномерного движения со следующим эффективным потенциалом.

**Эффективный потенциал (5.7.7)**

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{mM\kappa}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{L^2 r_0}{2mr^3}.$$

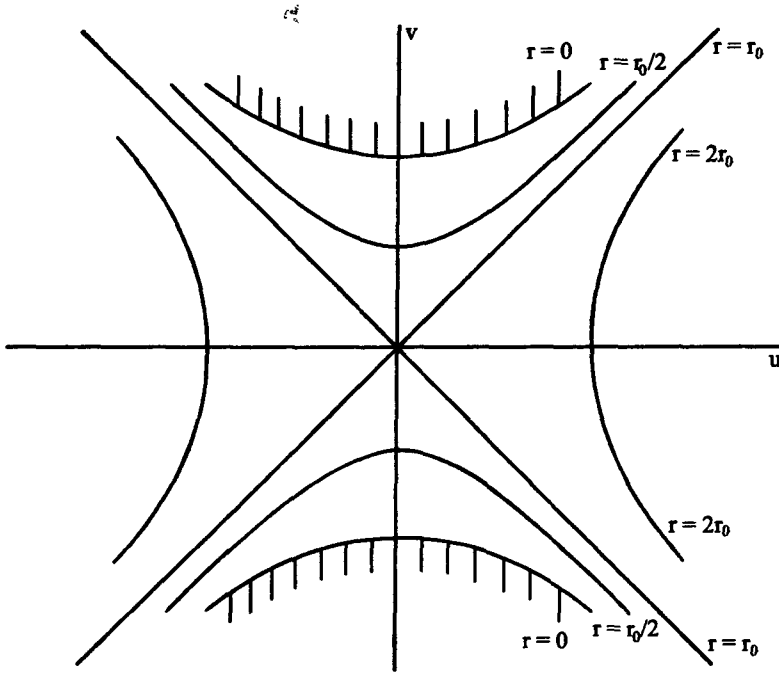


Рис. 5.11. Область полного решения Шварцшильда

**Примечания (5.7.8)**

1. Как и в нерелятивистской теории (4.2.12), первый член — ньютоновский, а второй — центробежный потенциал.
2. Дополнительный притягивающий член зависит теперь от  $r^{-3}$  (в (5.3.8) зависимость была  $r^{-2}$ ), поэтому при достаточно малых  $r$  главным всегда становится центробежный член. (В эффективный потенциал для  $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \dot{r} (1 - r_0/r)$  входят и отталкивающие члены, поэтому  $r_0$  достигается только при  $t = \infty$ , и поток  $X_H$  при  $r > r_0$  полный.)
3. В безразмерных величинах  $u := r_0/r$ ,  $\ell := L/mr_0$  имеем

$$\frac{2}{m} V_{\text{eff}} = -u + \ell^2(u^2 - u^3).$$

При  $\ell < \sqrt{3}$  это — монотонная функция, при  $\ell = \sqrt{3}$  возникает точка перегиба и при  $\ell > \sqrt{3}$  — максимум и минимум в точках

$$u_{\mp} = \frac{1}{3} [1 \mp \sqrt{1 - 3/\ell^2}], \quad \frac{2}{m} V_{\text{eff}}(u_{-}^{-1}) = \left( \frac{2\ell^2}{27} - \frac{1}{3} \right) \left( 1 - \sqrt{1 - 3/\ell^2} \right) - \frac{1}{9} \sqrt{1 - 3/\ell^2}$$

рис. 5.12).

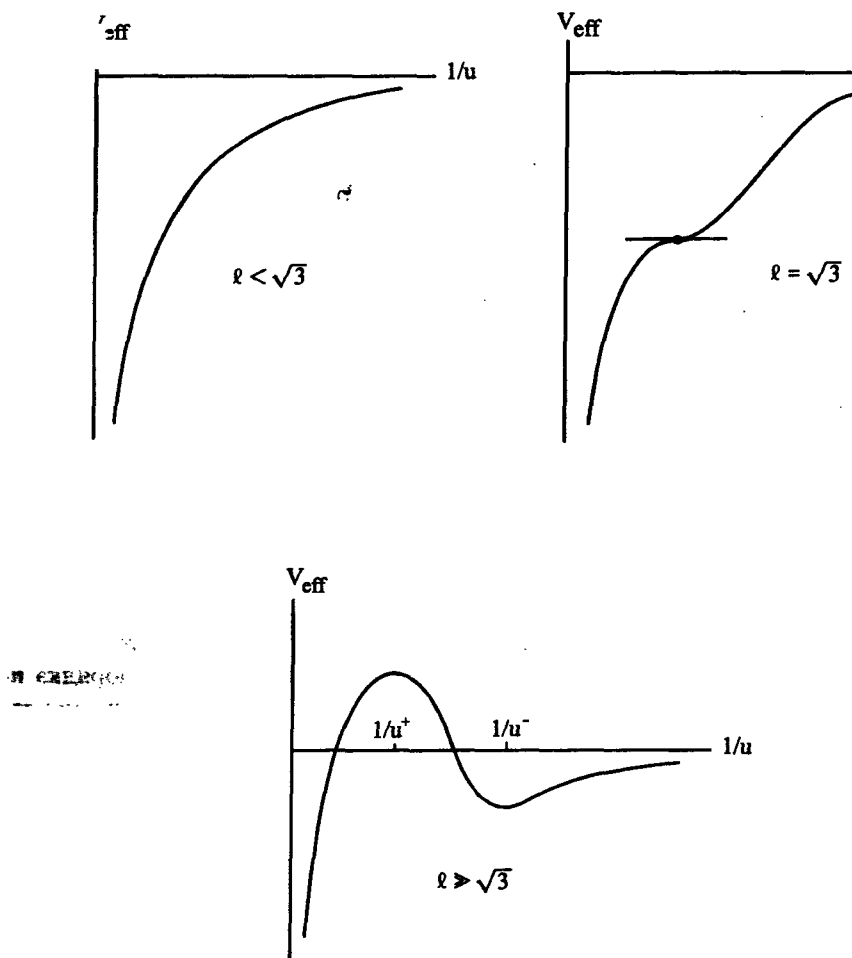


Рис. 5.12. Эффективный потенциал поля Шварцшильда

Только при достаточно большом  $l$  (т.е. если прицельный параметр  $\times$  скорость/скорость света  $\gg r_0$ ) образуется достаточно высокий центробежный барьер, способный удержать частицу от падения в черную дыру. При  $E < V_{\text{eff}}(u_{-}^{-1})$  воспрепятствовать падению частицы уже невозможно.

Как и в задаче Кеплера с электрическими зарядами (см. параграф 5.3), эллиптические траектории покрывают двумерную область в плоскости траекторий, перпендикулярной  $L$ . Для вычисления углов  $\varphi$ , при которых  $r$  достигает своих максимальных значений, лучше

всего исходить из уравнения

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{p_0^2}{m^2} - 1 + \frac{r_0}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}. \quad (5.7.9)$$

Прецессия перигелия описывается эллиптическим интегралом.

Угол прецессии перигелия (5.7.10)

$$\Delta\varphi := \oint \frac{dr L}{mr^2 \sqrt{\frac{p_0^2}{m^2} - 1 + \frac{r_0}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}} - 2\pi.$$

Разлагая член  $\sim 1/r^3$  (см. задачу (5.7.17,5)), получаем

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{r_0 m}{L}\right)^2 + o\left(\left(\frac{r_0 m}{L}\right)^2\right).$$

Примечания (5.7.11)

1. Для круговых орбит с  $R \gg r_0$  радиус  $R = 2L^2/r_0 m^2$ , а  $\Delta\varphi = 3\pi r_0/R$ .
2. Так как  $mr_0/2$  соответствует  $\alpha$  из (5.3.12,2), то угол прецессии  $\Delta\varphi$  в гравитационной задаче в шесть раз больше, чем в задаче с электрическими зарядами. И в гравитационном случае  $\Delta\varphi$  обусловлен увеличением эффективной массы при малых  $r$ . То, что  $\Delta\varphi$  в гравитационной задаче больше, может быть также интерпретировано в смысле принципа Маха, согласно которому эффективная масса частицы увеличивается вблизи других мас.
3. Так как при движении Земли вокруг Солнца  $r_0/R \sim 1 \text{ км}/10^8 \text{ км}$ , то прецессия перигелия приводит к очень слабому эффекту:  $\Delta\varphi$  составляет величину порядка нескольких угловых секунд за столетие, что гораздо меньше, чем другие возмущения траектории. Но для внутренних планет этот эффект после учета всех мыслимых поправок с процентной точностью, по-видимому, достигает одного процента.
4. Недавно была обнаружена нейтронная двойная звезда, в которой партнеры совершают оборот вокруг центра масс по орбите с  $R \sim 10^5 \text{ км}$  за несколько часов. В этом случае  $\Delta\varphi \sim$  градус/год.

Траектории, уходящие на бесконечность (5.7.12)

При  $0 < E < V_{\text{eff}}(u_{-}^{-1})$  траектории не падают на центр, а удаляются на бесконечность. Все сказанное в (5.3.13) относительно теории рассеяния для траекторий, уходящих на бесконечность остается в силе, поэтому мы ограничимся только изучением поведения угла рассеяния  $\vartheta$  при высоких энергиях. Здесь имеется различие по сравнению с нерелятивистской теорией (4.2) и в случае с электрическими зарядами (5.3). Там угол  $\vartheta$  при фиксированном прицельном параметре  $b$  и возрастающей энергии стремится к нулю (5.3.15,3). В гравитационном случае, как следует из (5.7.9), угол при  $r = \infty$  (если минимальный радиус  $r_{\min}$  достигается при  $\varphi = 0$ )

$$\varphi = \int_0^{1/r_{\min}} \frac{du}{\sqrt{\frac{p_0^2 - m^2}{L^2} + \frac{r_0 u m^2}{L^2} - u^2(1 - r_0 u)}}. \quad (5.7.13)$$

Хотя в пределе при  $p_0 = \gamma m \rightarrow \infty$ ,  $L = \gamma m v b \rightarrow \infty$ ,  $p_0/L \rightarrow 1/b$  ньютоновский член  $r_0/r$  становится несущественным, однако поправка к центробежному члену остается существенной:

$$\varphi \rightarrow \int_0^{1/r_{\min}} \frac{b du}{\sqrt{1 - b^2 u^2 (1 - r_0 u)}}.$$

Для определения угла рассеяния при  $r_0/b \ll 1$  вводим параметр  $\sigma = bu \sqrt{1 - r_0 u}$ , производим разложение по  $r_0/b$ ,  $bu \cong \sigma (1 + r_0 \sigma / 2b)$  и интегрируем до  $\sigma = 1$ , что соответствует  $u = 1/r_{\min}$ :

$$\varphi = \int_0^1 \frac{d\sigma (1 + r_0 \sigma / b)}{\sqrt{1 - \sigma^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{r_0}{b}.$$

Угол рассеяния  $\vartheta$  при  $p_0 \gg m$ ,  $b \gg r_0$  определяется равенством (см. рис. 5.13)

$$\vartheta = -\frac{2r_0}{b}. \tag{5.7.14}$$

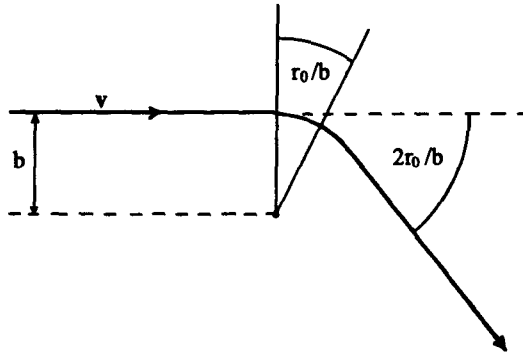


Рис. 5.13. Прицельный параметр и угол рассеяния

**Примечания (5.7.15)**

1. Знак “минус” соответствует притягательной природе гравитации.
2. Свет с длиной волны  $\ll r_0$  ведет себя в поле Шварцшильда как частица с  $\gamma \rightarrow \infty$ . Отклонение света вблизи Солнца может быть с хорошей точностью вычислено по формуле (5.7.14).

Как было показано, достаточно большой угловой момент (и поэтому достаточно большой прицельный параметр) позволяет избежать падения на центр. Радиальные траектории не ограничиваются областью  $r > r_0$ , и для их рассмотрения вернемся к переменным  $u$ ,  $v$  на рис. 5.11. Для времениподобных радиальных линий выполняется неравенство  $|dv| > |du|$ , поэтому на рисунке они всегда круче  $45^\circ$ : все живое не может выбраться из своего светового конуса. Это приводит нас к следующей картине (см. также рис. 5.10)

**Экспедиция в область с  $r < r_0$  (5.7.16)**

1. В области II каждая траектория заканчивается в особой точке при  $r = 0$  независимо от того, действует ли на частицу только гравитация или еще и электромагнитные силы.

Последние не мешают траекториям быть времениподобными линиями. Здесь  $\partial r$  — времениподобное направление, и падение на центр так же неизбежно, как неизбежно для нас старение в области  $I$ . Остаться в точке при  $r = \text{const}$  там так же невозможно, как остановить здесь ход времени.

2. То, что линия раздела областей  $I$  и  $II$   $v = u > 0$  является вместе с тем кривой  $t = \infty$ , означает лишь, что для наблюдателя при  $r > r_0$ , принимающего световые сигналы о падении на центр, время всегда растянуто сильнее и падение кажется продолжающимся бесконечно долго. Это соответствует тому, о чем мы упоминали в параграфе 5.6: часы в гравитационном поле идут медленнее. Если же измерять в собственном времени  $s$ , то падение длится недолго:  $\sim 10^{-5}$  с для звезд с радиусом  $r_0$ . Нетрудно показать, что световые сигналы от падающих тел, если их рассматривать из бесконечности, ослабевают как  $\exp[-t/r_0]$ , т.е. практически мгновенно.
3. По другую сторону от  $r_0$  существует мир, симметричный нашему: область  $III$ . О его существовании не можем ничего знать, так как ни одна траектория не ведет из  $III$  в  $I$ . Самое большее, если кто-нибудь отважился бы проникнуть в область  $II$ , то незадолго до кончины он мог бы встретить кого-нибудь из области  $III$  и почерпнуть от встречного какие-нибудь сведения.
4. Наконец, существует область  $IV$ , зеркально симметричная области  $II$ . Обитатели этой области могут по собственному усмотрению мигрировать из области  $r < r_0$  в  $I$  или  $III$ .

Этот пример показывает, сколь необычными могут показаться многообразия тому, кто привык думать о них, как о  $\mathbb{R}^n$ . В гл. 6 постараемся развить эту тему и пополнить представления о возможной структуре многообразий.

### Задачи (5.7.17)

1. Покажите, что замкнутые кеплеровские траектории возвращаются в исходное положение за собственное время, меньшее максимального. Сравните это время с собственным временем наблюдателя, который оставался в исходной точке.
2. Найдите зависимость  $\bar{r}(r)$ , при которой радиальная скорость света равна единице и, следовательно, метрика имеет вид

$$F(\bar{r})(d\bar{r}^2 - dt^2) + G(\bar{r})d\Omega^2.$$

3. В координатах

$$u = h(\bar{r} + t) + g(\bar{r} - t), \quad v = h(\bar{r} + t) - g(\bar{r} - t)$$

метрика из задачи (5.7.17,2) запишется в виде

$$f^2(u, v)(du^2 - dv^2) + r^2(u, v)d\Omega^2, \quad f^2 = \frac{(1 - r_0/r)}{4h'g'}.$$

Выберите  $h$  и  $g$  так, чтобы устранить нуль в точке  $r = r_0$ . Проверьте, что в старых переменных это соответствует (5.7.2,5).

4. Найдите координаты  $\bar{r}(r)$ , в которых метрика имеет вид

$$f(\bar{r})(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2) - g(\bar{r})dt^2.$$

Проверьте, что при  $\bar{r} \rightarrow \infty$  в полном соответствии с (5.6.2)  $g(\bar{r}) \rightarrow 1 - r_0/\bar{r}$ ,  $f \rightarrow 1 + r_0/\bar{r}$ .

5. Разложите (5.7.10) в ряд по  $L^2 r_0/m^2 r^3$  и, сохранив только члены первого порядка, воспользуйтесь интегрированием по комплексной переменной, как в (5.3.16,1).

## Решения (5.7.18)

1. В переменных из (5.7.8,3) собственное время  $s$  для круговых траекторий ( $dr = 0$ ) связано с  $t$  соотношением

$$ds = dt \sqrt{\frac{1 - r_0/r}{1 + r^2 \dot{\varphi}^2}} = dt \sqrt{\frac{1 - u}{1 + l^2 u^2}},$$

тогда как для покоящегося наблюдателя ( $dr = d\varphi = 0$ ) собственное время удовлетворяет соотношению  $ds_0 = dt \sqrt{1 - u}$ . Если траектория возвращается в исходную точку в момент времени  $t$ , то их собственные времена относятся как

$$\frac{s_0}{s} = \sqrt{1 + l^2 u^2} > 1.$$

2.  $\bar{r} = \int \frac{dr}{1 - r_0/r} = r + r_0 \ln \left( \frac{r}{r_0} - 1 \right)$ , метрика имеет вид  $\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) (d\bar{r}^2 - dt^2) + r^2 d\Omega^2$ .

3. Пусть  $\begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \exp \left[ \frac{\bar{r} \pm t}{2r_0} \right]$ , тогда

$$f^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) 4r_0^2 \exp \left[ -\frac{1}{r_0} \left( r + r_0 \ln \left( \frac{r}{r_0} - 1 \right) \right) \right] = \frac{4r_0^3}{r} \exp \left[ -\frac{r}{r_0} \right].$$

4. Форма метрики требует, чтобы  $r^2 = \frac{(dr/d\bar{r})^2}{1 - r_0/r} \bar{r}^2$ . После интегрирования получаем  $r = \bar{r} \left(1 + \frac{r_0}{4\bar{r}}\right)^2$  и тем самым метрику

$$\left(1 + \frac{r_0}{4\bar{r}}\right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2) - \left(1 + \frac{r_0}{4\bar{r}}\right)^{-2} \left(1 - \frac{r_0}{4\bar{r}}\right)^2 dt^2.$$

5. Необходимо вычислить только вычет в нуле:

$$\oint \frac{dr}{r \sqrt{-Ar^2 + Br - C + D/r}} = \oint \frac{dr}{r \sqrt{-Ar^2 + Br - C}} - \frac{1}{2} \oint \frac{dr D}{r^2(-Ar^2 + Br - C)^{3/2}} + O(D^2) = \frac{2\pi}{\sqrt{C}} + 2\pi \frac{3}{4} \frac{DB}{C^{5/2}} + O(D^2).$$

Полагая  $A = 1 - p_0^2/m^2$ ,  $B = r_0$ ,  $C = L^2/m^2$ ,  $D = r_0 L^2/m^2$ , получаем (5.7.10).

## 5.8. Движение в плоских гравитационных волнах

*Группа инвариантности и методы решения остаются такими же, как в задаче об электромагнитном поле, но при этом обнаруживаются некоторые новые аспекты.*

В каждой приемлемой теории гравитационного поля имеется аналог электромагнитных волн. Экспериментальное обнаружение гравитационных волн существенно подкрепило бы эту теорию, но до сих пор не удалось получить сколько-нибудь убедительных подтверждений их существования. Но для того чтобы наблюдать эффекты, связанные с гравитационными волнами, необходимо знать, как ведут себя в таких волнах частицы. Поэтому в заключение кратко рассмотрим эту проблему и сравним полученные результаты с электродинамическим аналогом (см. параграф 5.5).

Сразу после того как Эйнштейн вывел свои уравнения для  $g_{\alpha\beta}$ , были разработаны приближенные методы их решения. Однако поскольку уравнения Эйнштейна нелинейны, то неясно, являются ли эти приближения действительными решениями. Хотя до сих пор не удалось математически проследить за тем, каким образом гравитационные волны генерируются источником, однако точные решения, соответствующие плоским волнам, удается получить без особых трудностей. Выглядят они следующим образом.

### Поле и функция Гамильтона (5.8.1)

Гравитационный потенциал

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1}{f(t-x)} & \\ & & & \frac{1}{g(t-x)} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет уравнениям Эйнштейна без материи, если

$$f^{1/2}(f^{-1/2})'' + g^{1/2}(g^{-1/2})'' = 0,$$

и с учетом (5.6.7) приводит к функции Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[ -p_0^2 + p_x^2 + p_y^2 f(t-x) + p_z^2 g(t-x) \right].$$

### Примечания (5.8.2)

1. Уравнение (5.8.1) описывает, помимо прочего, некоторые фиктивные поля, представляющие только свободное движение (5.1.11) в ускоренной системе координат. Уравнения Эйнштейна мы подробно рассмотрим в дальнейшем,<sup>17</sup> и тогда выведем приведенное выше решение и убедимся, что для уравнения  $(f^{-1/2})'' = (g^{-1/2})'' = 0$  существует только фиктивное поле (см. задачу (5.8.9,1)).
2. В параграфе 5.5 функции  $f$  и  $g$  не обязательно были непрерывными. Теперь предполагаем, что  $(f^{-1/2})''$  существует.

<sup>17</sup>см. II: "Классическая теория поля".



Сравнивая  $\mathcal{H}$  с (5.5.1), замечаем, что ситуация с инвариантностью относительно сдвигов остается прежней, чем и обеспечивается интегрируемость уравнения (5.8.1). Вводя незначительные изменения в две другие величины, получаем то же число постоянных движения, что и прежде.

### Постоянные движения (5.8.3)

Величины  $p_y$ ,  $p_z$ ,  $p_x + p_0$ ,

$$p_z \int_0^{t-x} du g(u) + z(p_0 + p_x), \quad p_y \int_0^{t-x} du f(u) + y(p_0 + p_x)$$

постоянны.

### Доказательство

Доказательство следует непосредственно из того, что  $\dot{z} = \frac{p_z g}{m}$ ,  $\dot{y} = \frac{p_y f}{m}$ ,  $\dot{t} - \dot{x} = -\frac{(p_0 + p_x)}{m}$ .

□

### Примечания (5.8.4)

1. Порожденная пятью постоянными движения группа инвариантности изоморфна группе инвариантности электромагнитного поля (5.5.3) (см. задачу (5.8.9,4)).
2. Чтобы однозначно задать траекторию, недостает одной постоянной движения. В остальном интегрирование уравнений движения происходит точно так же, как в (5.5.5,3). Сначала (полагая  $u(0) = 0$ ) заключаем, что

$$\begin{aligned} t(s) - x(s) &= \alpha s, \\ t(s) + x(s) &= t(0) + x(0) + \alpha^{-2} \int_0^{\alpha s} du \left[ 1 + \frac{f(u)p_y^2 + g(u)p_z^2}{m^2} \right], \end{aligned}$$

и получаем точное решение координаты как функции собственного времени.

### Явное представление координат как функций собственного времени (5.8.5)

$$\begin{aligned} t(s) &= t(0) + \frac{s}{2} \left( \frac{1}{\alpha} + \alpha \right) + \frac{1}{2m^2\alpha^2} [p_y^2 F(\alpha s) + p_z^2 G(\alpha s)], \\ x(s) &= x(0) + \frac{s}{2} \left( \frac{1}{\alpha} - \alpha \right) + \frac{1}{2m\alpha^2} [p_y^2 F(\alpha s) + p_z^2 G(\alpha s)], \\ y(s) &= y(0) + \frac{p_y}{m\alpha} F(\alpha s), \quad z(s) = z(0) + \frac{p_z}{m\alpha} G(\alpha s), \\ F(u) &= \int_0^u du' f(u'), \quad G(u) = \int_0^u du' g(u'), \quad \alpha = -\frac{p_0 + p_x}{m}. \end{aligned}$$

### Примечание (5.8.6)

Из (5.8.5) видим, в частности, что

$$(t(s), x(s), y(s), z(s)) = (s + t(0), x(0), y(0), z(0))$$

— решение с  $\alpha = 1$ ,  $p_y = p_z = 0$ . Поэтому можно было бы прийти к ошибочному заключению, что гравитационные волны в отличие от световых не действуют на частицы, первоначально находившиеся в состоянии покоя, и, следовательно, их невозможно детектировать. Однако не следует забывать о том, что координаты  $(t, x, y, z)$  отнюдь не соответствуют измеренным расстояниям; как раз наоборот, мы увидим сейчас, что они особенно подходят для описания траекторий первоначально покоившихся частиц. Перемещения частиц в направлении оси  $y$  (соответственно оси  $z$ ) равно  $dy f^{-1/2}$  (соответственно  $dz g^{-1/2}$ ), и эта величина при фиксированных  $dy$  и  $dz$  изменяется вместе с  $t - x$ . Таким образом, гравитационная волна создает ускорение в направлении, перпендикулярном тому, в котором она распространяется.

### Пример (5.8.7)

Условию

$$(f^{-1/2})'' f^{1/2} + (g^{-1/2})'' g^{1/2} = 0$$

из (5.8.1) удовлетворяют, например,  $f^{-1/2}(u) = \cos ku$ ,  $g^{-1/2}(u) = \operatorname{ch} ku$ . Для построения импульса конечной протяженности  $\tau$  необходимо сшить эти функции с решениями уравнений  $(f^{-1/2})'' = (g^{-1/2})'' = 0$  так, чтобы  $f, g \in C^2$ :

|                | $f^{-1/2}(u)$                         | $g^{-1/2}(u)$   |
|----------------|---------------------------------------|---|
| $u < 0$        | 1                                     | 1   |
| $0 < u < \tau$ | $\cos ku$                             | $\operatorname{ch} ku$  |
| $\tau < u$     | $\cos k\tau + k(\tau - u) \sin k\tau$ | $\operatorname{ch} k\tau - k(\tau - u) \operatorname{sh} k\tau$ |

Предельным случаем был бы “ $\delta$ -импульс” ( $\tau \rightarrow 0$ ,  $k = 1/\sqrt{\tau} \rightarrow \infty$ ), что означает следующее:

|         | $f(u)$      | $g(u)$      | $F(u)$    | $G(u)$    |
|---------|-------------|-------------|-----------|-----------|
| $u < 0$ | 1           | 1           | $u$       | $u$       |
| $u > 0$ | $1/(1-u)^2$ | $1/(1+u)^2$ | $u/(1-u)$ | $u/(1+u)$ |

### Примечания (5.8.8)

1. При  $t - x =: u > 0$  метрика имеет вид

$$g = dx^2 + (1-u)^2 dy^2 + (1+u)^2 dz^2 - dt^2.$$

Таким образом, волна действует так, что покоящееся тело сжимается в направлении оси  $y$  и растягивается в направлении оси  $z$  (квадрупольное поле).

2. Так как  $g_{yy}$  при  $u = 1$  обращается в нуль, то карта  $(t, x, y, z)$  применима только при  $t - x < 1$ . Но в указанной области речь может идти только о кажущейся особенности, поскольку из (5.8.2,1) следует, что  $g$  из задачи (5.8.9,1) есть не что иное как метрика  $\eta$ , только записанная в других координатах. Действительно, полагая  $u = t - x = T - X$ , находим

$$T = t - \frac{(1-u)y^2}{2} + \frac{(1+u)z^2}{2},$$

$$X = x - \frac{(1-u)y^2}{2} + \frac{(1+u)z^2}{2},$$

$$Y = (1-u)y, \quad Z = (1+u)z,$$

откуда  $g = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dT^2$  (см. задачу (5.8.9,1)).

3. Кривые  $(x, y, z) = \text{const}$  — траектории первоначально покоившихся частиц. При  $u = 1$  они фокусируются в направлении оси  $y$ : расстояние между ними в направлении оси  $y$  стремится к нулю. Может возникнуть надежда, что таким способом удастся достичь сверхсветовой скорости, поскольку сказанное остается в силе и для частиц, которые при  $u = 0$  были сколь угодно далеки друг от друга. Но если рассматривать происходящее по карте  $(T, X, Y, Z)$ , передающей при  $u > 0$  реально измеренные расстояния, времена и скорости, то в новых координатах траектория  $(t, x, y, z) = (s, 0, m, 0)$  имеет вид

$$X = -\frac{m^2/2}{1+m^2/2}(1-T), \quad Y = \frac{m}{1+m^2/2}(1-T), \quad Z = 0.$$

$\forall m$  в момент времени  $T = 1$  она достигает начала координат, но не со сверхсветовой скоростью:

$$\left(\frac{dX}{dT}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dT}\right)^2 = \frac{m^2 + m^4/4}{(1+m^2/2)^2} < 1.$$

Так как гравитационный импульс достиг этой траектории в момент времени  $T = -m^2/2$ , то частицам, первоначально находившимся на большем расстоянии, требовалось больше времени, чтобы достичь начала координат.

4. Разумеется, выделенность начала координат, к которому сбегаются частицы, имеет лишь кажущийся характер. В действительности за начало координат можно выбрать любую точку, если вместо  $(T, X, Y, Z)$  воспользоваться сдвинутыми координатами.

**Гравитационные волны** возбуждают в каждом теле на своем пути **квадрупольные колебания** в направлении, перпендикулярном тому, в котором происходит распространение волн. Однако амплитуды этих колебаний по оценкам настолько малы, что не следует удивляться тому, почему до сих пор гравитационные волны не были обнаружены.

#### Задачи (5.8.9)

1. Проверьте (5.8.8,2).
2. Проверьте, что для решения (5.8.5)  $g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -1$ .
3. Проинтегрируйте уравнение  $f^{1/2}(f^{-1/2})'' + g^{1/2}(g^{-1/2})'' = 0$ , полагая  $f = L^{-2} e^{2\beta}$ ,  $g = L^{-2} e^{-2\beta}$ .
4. Вычислите скобки Пуассона для постоянных движения (5.8.3) и сравните их с (5.5.14,2).

#### Решения (5.8.10)

1. Полагая  $U = u = T - X = t - x$ ,  $V = X + T = x + t - (1-u)y^2 + (1+u)z^2$ ,  $x + t = v$ , получаем
- $$-dUdV + dY^2 + dZ^2 = -du[dv - 2ydy(1-u) + 2zdz(1+u) + du(y^2 + z^2)] +$$
- $$+ [dy(1-u) - du_y]^2 + [dz(1+u) + du_z]^2 = -dudv + dy^2(1-u)^2 + dz^2(1+u)^2.$$

2

$$\dot{x}^2 - \dot{t}^2 + \frac{\dot{y}^2}{f} + \frac{\dot{z}^2}{g} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\alpha} - \alpha + \frac{p_y^2 f + p_z^2 g}{\alpha m^2} \right)^2 -$$

$$- \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\alpha} + \alpha + \frac{p_y^2 f + p_z^2 g}{\alpha m^2} \right)^2 + \frac{p_y^2}{m^2} f + \frac{p_z^2}{m^2} g = -1.$$

3. Указанная в условиях задачи подстановка приводит уравнение к виду  $L'' + \beta'^2 L = 0$ . Его решением служит

$$\beta(u) = \int_0^u du' \sqrt{-\frac{L''(u')}{L(u')}}.$$

Можно также задать  $L$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство  $L''/L < 0$ , и вычислить соответствующее  $\beta$ .

4.  $\{p_z G(u) + z(p_0 + p_x), p_z\} = p_0 + p_x = \{p_y F(u) + y(p_0 + p_x), p_y\}$ , остальные скобки Пуассона равны нулю. Таким образом, группа инвариантности изоморфна группе инвариантности, порождаемой постоянными движения (5.5.4), и поэтому группе инвариантности тензора электромагнитного поля. ( $G = \int g, F = \int f$ .)

#### Некоторые нерешенные задачи (5.8.11)

1. Признак устойчивости (3.4.24) практически не имеет значения, поскольку трудно доказать существование  $C_{\pm}$ . Существуют многочисленные другие признаки устойчивости, но они не применимы к гамильтоновым системам. Нельзя ли найти для них какое-нибудь применение?
2. Теорема КАМ (3.6.19) гарантирует для системы с многими степенями свободы существование инвариантных подмногообразий только при малых возмущениях. Связано ли это со способом доказательства или при сильных возмущениях действительно разрушаются все инвариантные многообразия? Почти оптимальные оценки в простых случаях приведены в работах: *Mac Kay R., Persival I. // Commun. Math. Phys., 98, 469 (1985)* и *Celletti A., Chierchia A. // Commun. Math. Phys. 118, 119 (1988)*.
3. Когда возмущения становятся для системы настолько сильными, что перестает выполняться теорема КАМ и система становится хаотической, т.е. когда траектория всюду плотно заполняет энергетическую поверхность?
4. Предположим, что траектория заполняет не всю энергетическую поверхность. Когда траектория всюду плотно заполняет достаточно представительную часть энергетической поверхности так, что среднее по времени от наблюдаемых равно их среднему по энергетической поверхности?
5. Предположим, что имеет место ситуация, описанная в задаче (5.8.9,4). Как долго среднее по времени выходит на значение, например, отличающееся на одну десятую процента от предельного значения при больших временах?
6. В задаче  $N$  тел существуют следующие траектории:
  - а) траектории со столкновениями;
  - б) траектории, по которым частицы уходят на бесконечность;
  - в) траектории, двигаясь по которым, все частицы остаются в конечной части фазового пространства.

Как велика та часть фазового пространства, которую заполняют траектории каждого из трех типов или их замыкания при  $N \geq 3$ ?

7. Одно из явлений, которые могут происходить в задаче  $N \gg 3$  тел (с гравитацией), заключается в образовании небольших очень сильно связанных между собой групп или кластеров частиц. Такие кластеры обладают тенденцией к усилению связи между частицами, а высвободившаяся энергия затрачивается на разрушение менее сильно связанных кластеров (по теореме вириала, более сильно связанные кластеры обладают большей кинетической энергией и, следовательно, горячее; это означает, что имеем дело с отрицательной удельной теплоемкостью: горячие кластеры, отдавая энергию, становятся еще горячее, а холодные, поглощая энергию, становятся еще холоднее). Можно ли вывести такое поведение кластеров из уравнений движения?
8. В релятивистском случае не решена даже задача двух тел, поскольку необходимо учитывать бесконечное число степеней свободы поля. Если их исключить, то действующая на частицы сила зависит не только от мгновенного положения частиц, но и от предыстории. Как это описать математически? Вопрос имеет не чисто академический интерес, так как релятивистская задача двух тел может реализоваться в двойных звездах с черными дырами или нейтронными звездами.

## 6. Структура пространства и времени

*Пространство и время определяются в физике через поведение мерных стержней и часов, которое в свою очередь определяется уравнениями движения. Тем самым фигурирующие в формализме математические структуры обретают конкретный смысл.*

### 6.1. Однородная Вселенная

**Первый шаг** к построению релятивистской теории состоит в познании однородности пространства и времени. Она выражается в инвариантности законов относительно пространственно-временных сдвигов и утверждает, что ни одна точка многообразия не выделена по сравнению с другими. Однако такая однородность совместима со структурой, в которой определенные направления выделены.

На математическом языке это соответствует расширенному конфигурационному пространству  $M_e$ .

$M_e$  как прямое произведение (6.1.1)

$$M_e = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = (\text{Время}) \times (\text{Верх-Низ}) \times (\text{Восток-Запад}) \times (\text{Север-Юг}).$$

**Иначе** говоря, канонически заданы проекции на четыре координаты. Такая ситуация приводит к трансляционно-инвариантной анизотропной функции Гамильтона

$$H = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(\mathbf{p}_i) + \sum_{i>j} V_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j), \quad (6.1.2)$$

обознач.

где  $\varepsilon_i$  — вращательно-инвариантные функции импульсов.

**Примечания** (6.1.3)

1. Под  $M_e$  здесь следует понимать расширенное конфигурационное пространство одной частицы. При этом все потенциалы всегда настолько регулярны, что в качестве  $M_e$  можно выбирать  $\mathbb{R}^4$ .
2. Если потенциал  $V$  имеет вид

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{x_1^2 \omega_1^2 + x_2^2 \omega_2^2 + x_3^2 \omega_3^2 - a} \right)^2,$$

то молекулы, образованные из частиц с таким потенциалом, совершают колебания по различным направлениям, что позволяет экспериментально устанавливать направления координатных осей.

3. Чтобы нарушить галилееву инвариантность, т.е. инвариантность относительно преобразований Галилея  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{v}t$ ,  $t \rightarrow t$ , функции  $\varepsilon$  должны иметь более сложную форму, чем  $|\mathbf{p}|^2$ , например,

$$-\sum_{\alpha=1}^3 k_{\alpha}^{-2} \cos p_{\alpha} k_{\alpha}.$$

4. Функции Гамильтона такого типа — это не только научная фантастика, но и используются при описании движения электронов в кристаллах.

Если функция Гамильтона  $H$  из (6.1.2) не инвариантна относительно растяжений, то основные законы могут определять некоторые длины. Например, если молекулу, состоящую из частиц, описываемых потенциалом (6.1.3,2), привести в состояние покоя в направлении  $i$ , то длина ее окажется равной  $a/\omega_i$ . Такую молекулу можно использовать как мерную линейку и часы, и в силу однородности многообразия  $M_e$  такой эталон длины и времени может одинаково хорошо функционировать всегда и всюду. Тем самым  $M_e$  обретает еще одну структуру — структуру риманова пространства.

$M_e$  как риманово пространство (6.1.4)

Функция Гамильтона (6.1.2), (6.1.3,2 и 3), наделяет  $M_e$  метрикой

$$g = dt^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 + \frac{dx_1^2}{a_1^2} + \frac{dx_2^2}{a_2^2} + \frac{dx_3^2}{a_3^2}, \quad \omega = \text{одной из } \omega_i, \quad a_i = \frac{a}{\omega_i}.$$

Примечания (6.1.5)

1. Такая метрика  $g$  использует молекулу, о которой упоминалось выше, в качестве эталонов времени и длины: полный цикл колебаний молекула совершает за время  $dt = 2\pi/\omega$ , и, заняв некоторое положение, задает длину  $dx_i = a_i$  в различных направлениях.
2. Метрика (6.1.4) остается бесспорной лишь в том случае, если все мерные линейки и часы ведут себя одинаково. Но даже в этом случае мы не сможем сказать, что молекула имеет различную длину в различных направлениях, а предпочтем перейти к координатам  $x_i/a_i$ .
3. Можно также постулировать псевдориманову метрику  $g = -dt^2(\omega/2\pi)^2 + \dots$ . Поскольку временная ось выделена, то эта метрика  $g$  содержит ту же информацию, что и риманова метрика (6.1.4).
4. Даже если функция  $H$  не инвариантна относительно растяжений, то может случиться так, что уравнения движения не будут определять мерных линеек и часов, поскольку инвариантность уравнений движения отнюдь не обязательно требует инвариантности функции Гамильтона  $H$ . Например, нерелятивистские уравнения движения (1.1.1), (1.1.2) инвариантны относительно преобразований

$$x \rightarrow \lambda^2 x, \quad t \rightarrow \lambda^3 t, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

не связанных с однопараметрической группой инвариантности функции Гамильтона  $H$ . Вещество в силу своей атомистической структуры определяет длины и времена. Это обусловлено квантовомеханической природой вещества. Из  $e$ ,  $m$  и  $\hbar$  можно составить боровский радиус  $\hbar^2/mc^2$  и ридберговскую частоту  $me^4/2\hbar^3$ . Только в квантовой теории решения основных уравнений с реалистическими силами (1.1.2) определяют длины и времена, и тогда физическое расширенное конфигурационное пространство  $M_e$  обретает риманову структуру.

## 6.2. Изотропная Вселенная

На поверхности Земли направление Верх–Низ выделено более явно, чем направления Север–Юг и Восток–Запад, и исторически этим направлением стали пользоваться гораздо раньше. Направление Верх–Низ нарушает изотропию пространства. Если существование вертикали (направления Верх–Низ) рассматривать как фундаментальный факт, то для описания законов природы, возможно, следовало бы использовать гамильтониан в виде:

$$\mathcal{H} = \sum_i \varepsilon_i(|\mathbf{p}_i|) + \sum_{i>j} V_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) + g \sum_i m_i z_i. \quad (6.2.1)$$

## Примечания (6.2.2)

1. Так как кинетическая энергия и  $V_{ij}$  зависят только от абсолютных величин векторов, то сохраняется инвариантность относительно вращений вокруг оси  $z$ . Следовательно, группа инвариантности расширяется по сравнению с § 6.1 от  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  до  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E_2$ .
2. Соответственно  $M_e$  представимо в виде произведения  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = (\text{Время}) \times (\text{Верх-Низ}) \times (\text{Поверхность Земли})$ . Мы проводим различие между  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^2$ . В первом случае проекции на обе оси выделены, во втором — все направления равноправны.

Самое позднее после кругосветного путешествия наши воображаемые ученые пришли бы к заключению, что положение относительно Земли не столь важно, исключили бы  $g$  из мировой формулы (6.2.1) и предложили бы следующую структуру  $M_e$ :

$$M_e = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = (\text{Время}) \times (\text{Пространство}). \quad (6.2.3)$$

## Примечания (6.2.4)

1. С точки зрения математики структура прямого произведения означает, что проекции на  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^3$  заданы канонически (рис. 6.1). Относительно любых двух точек из  $M_e$  однозначно утверждается, находятся ли они в одно и то же время в различных точках пространства или в различное время в одной и той же точке пространства. Равномерны только системы координат, переходящие одна в другую при сдвигах или пространственных вращениях, что никак не сказывается на приведенных выше утверждениях (рис. 6.2).

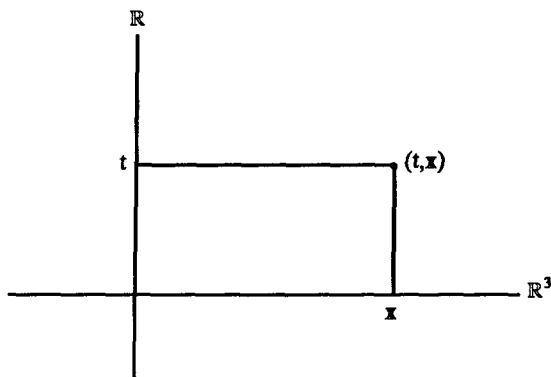


Рис. 6.1. Канонические проекции расширенного конфигурационного пространства  $M_e$

2. Существование проекции на  $\mathbb{R}^3$  выделяет покоящуюся систему координат из равномерно движущихся. Уместно спросить, насколько абсолютно покоящиеся тела отличаются от движущихся. Например, в одномерном случае кинетическая энергия двух тел может быть равна  $-k^{-2}(\cos kp_1 + \cos kp_2)$ , и тем самым некоторая покоящаяся система отсчета оказывается выделенной. Если при  $m_1 = m_2$  перейти, как в (4.2.2), к координатам центра масс и относительным координатам, то кинетическая энергия запишется в виде

$$-\frac{2}{k^2} \cos(pk) \cos\left(\frac{p_s k}{2}\right).$$

Так как  $V$  зависит только от  $x_1 - x_2$ , то импульс  $p_s$  постоянен, но

$$\dot{x}_s = \frac{1}{k} \sin \frac{1}{2} p_s k \cos pk.$$

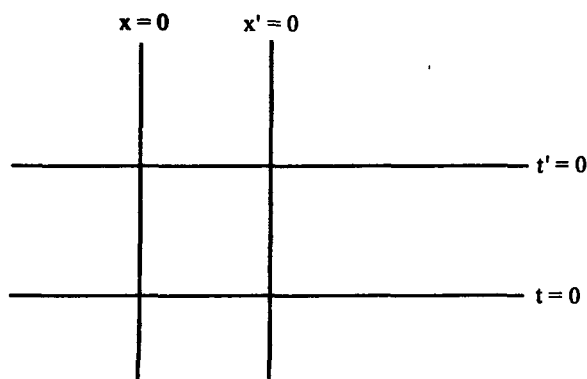


Рис. 6.2. Трансляции

Если  $p$  зависит от времени, то  $\dot{x}_s$  не зависит от времени лишь при  $p_s = 0$ . Центр масс движущихся молекул не имеет постоянной скорости. Этот объективный критерий вынуждены признать даже те наблюдатели, которые движутся относительно молекул.

3. Как было показано в предыдущем параграфе, функция Гамильтона (6.1.2) определяет (в конечном счете — с помощью  $\hbar$ ) длины и времена и наделяет  $M_e$  римановой структурой. Сумма скалярных произведений в  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^3$  задает метрику (а разность скалярных произведений в  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^3$  — псевдометрику)

$$g = v^2 dt^2 + |dx|^2, \quad (6.2.5)$$

где  $v$  — отношение определяемых с помощью (6.1.4) длин и времен.

После приведенных выше соображений о природе пространства и времени, какими они представлялись бы существам, выросшим в кристалле, обратимся теперь к миру, в котором живем, и рассмотрим его структуру сначала в общих чертах, не вдаваясь в подробности.

### 6.3. $M_e$ по Галилею

Рассмотрим фундаментальные законы (1.1.1) и (1.1.2), инвариантные относительно группы Галилея (4.1.9). Галилеева инвариантность лишает состояния покоя и равномерного движения абсолютного смысла, так как системы координат на рис. 6.3 равноправны. Не существует способа утверждать независимо от карт, что два события (элементы  $M_e$ ) происходят в одном и том же месте в различное время. Хотя одновременность все еще имеет абсолютный смысл, так как преобразования Галилея её не затрагивают, однако с математической точки зрения (см. (2.2.15))  $M_e$  имеет структуру расслоенного пространства:

$M_e$  по Галилею есть расслоенное пространство  $\mathbb{R}^4$  с  $\mathbb{R}$  (= время) в качестве базы и  $\mathbb{R}^3$  (= пространство) в качестве слоя (6.3.1)

#### Примечания (6.3.2)

1. Проекция  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  на пространство не каноническая, и поэтому  $M_e \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ . На карте  $M_e$  представимо в виде прямого произведения;  $M_e$  тривиализуемо, но не тривиально. Физически это означает, что в любых равномерно движущихся друг относительно друга системах отсчета  $M_e$  допускает разложение на пространство и время, но подмногообразия  $x = 0$  в различных системах различны, хотя все они равноправны.



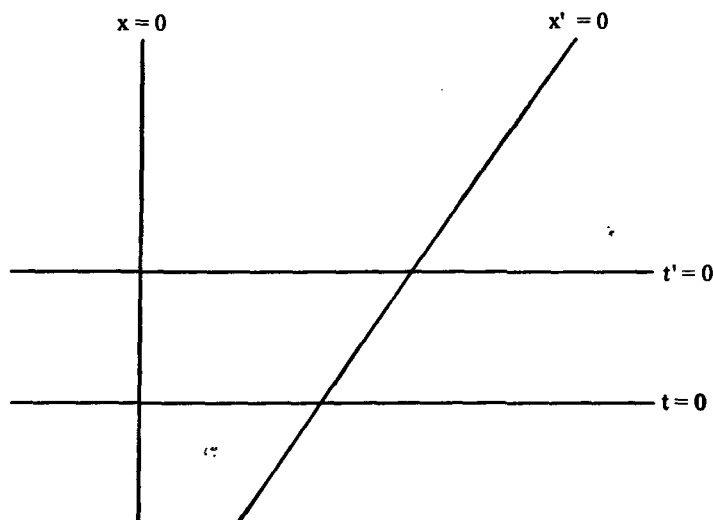


Рис. 6.3. Преобразование Галилея

2. Хотя слой  $\mathbb{R}^3$  обладает аффинной структурой, однако начало отсчета векторов  $x$  не выделено. Ситуация аналогична той, с которой мы сталкиваемся в фазовом пространстве  $T^*(\mathbb{R}^4)$ , где в слое начало  $p = 0$  не выделено и может быть сдвинуто с помощью преобразований Галилея  $p \rightarrow p + mv$ .
3. Проекция на базис — универсальное правило синхронизации часов. Достичь согласия по поводу этого правила нетрудно, так как любые скорости достижимы: подмногообразии  $t = \text{const}$  однозначно характеризуется тем, что независимо от того, сколь велика скорость, невозможно перейти из любой точки этого многообразия в любую другую. Такое положение дел сохраняется во всех системах отсчета.
4. Длины и времена могут быть определены с помощью  $\hbar$  так, чтобы пространство и время обладали римановой структурой. Так как  $M_e \neq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , то риманова структура не переносится на  $M_e$ . На  $M_e$  не существует выделенной прямоугольной системы координат, в которой метрика была бы представима в виде суммы (6.2.5). Хотя временное расстояние между двумя точками однозначно определено, пространственное расстояние между точками в различное время зависит от состояния движения системы отсчета и не может быть определено независимо от карты.

## 6.4. $M_e$ как пространство Минковского

Выясним, какой структурой наделяют пространство и время (пространство Минковского) релятивистские уравнения (1.1.3). Кроме того, предположим, что полная система уравнений (уравнения движения (1.1.3) — уравнения Максвелла для  $F$ ) инвариантна относительно группы Пуанкаре (5.1.12). В равномерно движущихся друг относительно друга системах все выглядит одинаково, если координаты подвергнуть преобразованию из (5.1.12). Структура расслоенного пространства на  $M_e$  при этом утрачивается, так как по сравнению с рис. 6.3 конкретное преобразование (5.2.6) выглядит так, как показано на рис. 6.4.

### Следствие (6.4.1)

*Одновременность в пространстве Минковского не может быть определена независимым от карт образом.*

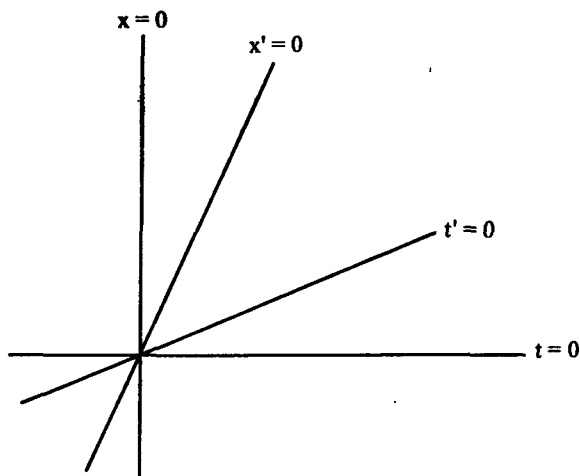


Рис. 6.4. Преобразование Лоренца

**Примечания (6.4.2)**

- 1. На этот раз в нашем распоряжении уже нет сколь угодно больших скоростей для синхронизации, как в (6.3.2,3).
- 2. Синхронизация, определенная на картах  $(t, x)$  и  $(t', x')$ , соответствует требованию, согласно которому на одной карте световые сигналы  $(\ell_1, \ell_2)$ , испущенные одновременно из точек  $(a, b)$ , встречались бы в этой системе отсчета посередине, и известна как **Эйнштейновская синхронизация** (рис. 6.5).

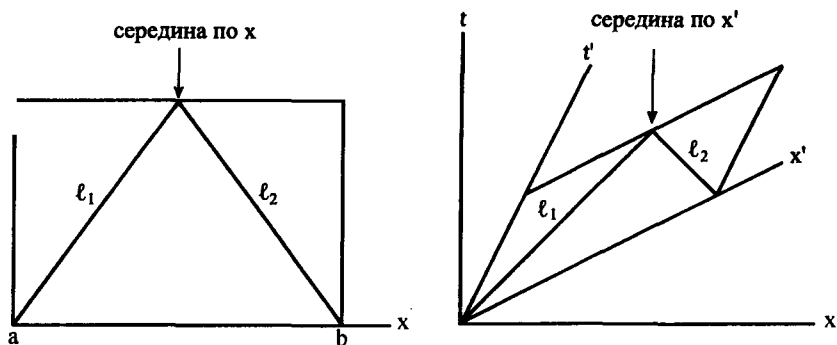


Рис. 6.5. Синхронизация с помощью световых сигналов по Эйнштейну

- 3. Разумеется, можно было бы просто потребовать, чтобы проекция на ось  $t$ , задаваемая эйнштейновской синхронизацией в некоторой системе отсчета (системе покоя эфира), распространялась на все остальные системы. Такому “рецепту” соответствовало бы преобразование

$$x'' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2}} = x', \quad t'' = t \sqrt{1 - v^2} = t' - vx'.$$

При этом момент времени  $t = 0$  совпадал бы с  $t'' = 0$ ,  $x''$  и  $t''$  были бы соответственно

расстоянием и временем, измеренными реальными линейками и часами. Против введения системы покоя эфира говорит, например, следующее:

- а) в природе не существует выделенной системы отсчета;
- б) те, кто пользовался бы системой отсчета  $(t'', x'')$ , чувствовали бы себя ущемленными, так как уравнения имели бы очень сложный вид;
- в) преобразования не образуют группу.

Тем не менее, если исходить из чисто логических соображений, то исключить такую карту невозможно, поскольку по нашему определению многообразия допустимы даже самые “сумасшедшие” координаты. Так можно было бы спасти абсолютную одновременность, но никто не хочет идти на подобную жертву; философские принципы менее убедительны, чем математическое изящество.

Еще в (6.3.2,1) мы заметили, что из-за отсутствия канонической проекции на  $\mathbb{R}^3$  пространственные расстояния зависят от карты, если точки не одновременны. Так как теперь одновременность тоже зависит от карты, то пространственные и временные интервалы также становятся зависимыми от карты — подобно тому, как при переходе от § 6.1 к § 6.2 длина тела в направлении 1 утрачивает свой абсолютный смысл. Но то, что при этом происходит, теперь более необычно и требует более подробного рассмотрения.

Прежде всего необходимо ясно показать, что координаты  $(t', x')$  так же, как и координаты  $(t, x)$ , выражают реально измеренные времена и расстояния. Мерная линейка единичной длины, один конец которой находится в точке  $(t, x) = (t, 0)$ , а другой — в точке  $(t, x) = (t, 1)$ , соответствует определенному решению  $\ell$  системы уравнений. Поскольку система уравнений лоренц-инвариантна, то существует также решение  $\ell'$ , полученное из  $\ell$  преобразованием Лоренца, с концами в точках  $(t', x') = (t', 0)$  и  $(t', x') = (t', 1)$ . Это означает, что если мерная линейка движется, то и в системе отсчета  $(t', x')$  она также остается эталоном единичной длины. Разумеется, процесс перехода (ускорения) из системы отсчета  $(t, x)$  в систему отсчета  $(t', x')$  должен быть не слишком резким, например, не должны возбуждаться молекулы, — старое решение должно оставаться в силе, но переходить в лоренц-преобразованное. Интересно отметить, что как длина  $l$  в нештрихованной системе координат, так и длина  $l'$  в штрихованной системе равны  $\sqrt{1-v^2} < 1$ . Это кажущееся противоречие объясняется тем, что в каждой системе координат длина есть расстояние между концами пространственного отрезка в одно и то же время, но одновременность в штрихованной и нештрихованной системах координат различается (рис. 6.6).

#### Следствие (6.4.3)

*В пространстве Минковского движущееся тело сокращается в направлении движения в  $\sqrt{1-v^2}$  раз (лоренцево сокращение).*

#### Примечания (6.4.4)

1. В следствии (6.4.3) существенно, что синхронизация понимается в смысле Эйнштейна. В координатах (6.4.2,3)  $t'' = 0$  — горизонтальная прямая. Так как движущееся тело сокращается в направлении движения, то при наблюдении из движущейся системы отсчета масштаб покоящейся системы координат удлиняется. Обратите внимание, что концы мерной линейки единичной длины имеют мировые линии  $x' = 0$  и  $x' = 1$ . От нештрихованных координат они отличаются только соглашением о времени. Стрелки часов с мировой линией  $x' = 0$  занимают все возможные положения по одному разу между  $t' = 0$  и  $t' = 1$ .

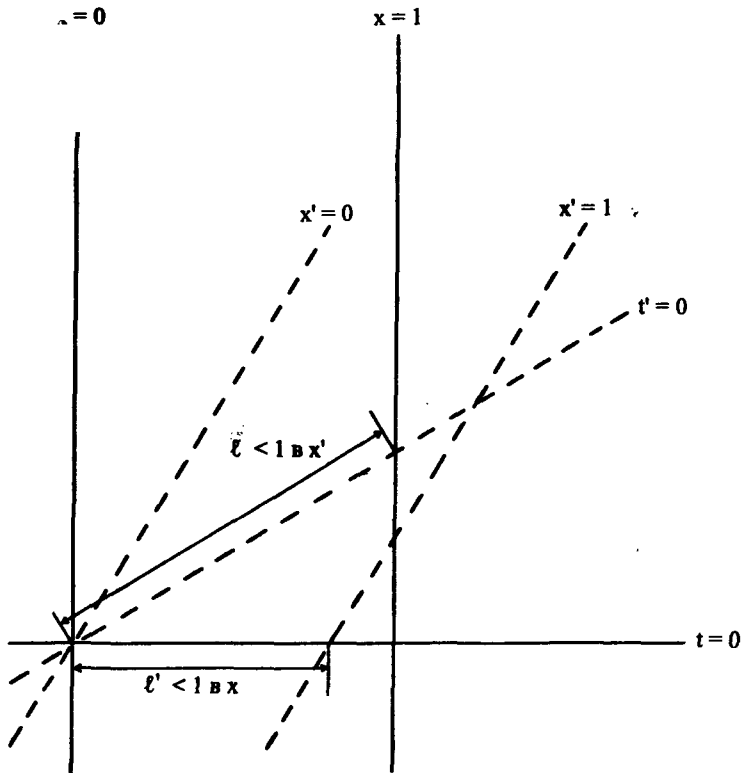


Рис. 6.6. Лоренцовское сокращение

1. Если сфотографировать движущееся тело, то эффект замедления  $\sim (v/c)$  окажется более сильным, чем лоренцево сокращение  $\sim (v/c)^2$ . Снимок не даст картины мгновенного положения, но частицы, находящиеся на расстоянии  $L$ , оказываются сфотографированными в таком положении, где они находились на  $L/c$  раньше, т.е. смещенными на расстояние  $Lv/c$ . Нетрудно понять, что в результате тело кажется не сокращенным, а повернутым.
2. Если принять, что все равномерно движущиеся друг относительно друга системы равноправны, то лоренцево сокращение можно доказать безотносительно к синхронизации часов. Для этого представим себе две одинаковые мерные линейки  $l_1, l_2$ , движущиеся с равномерными по величине скоростями, но противоположными по направлениям, и пометим положение концов в тот момент, когда линейки совпадут. Из соображений симметрии следует, что помеченными окажутся одновременные положения (рис. 6.7).

В аналогичной ситуации встретимся при рассмотрении продолжительности временного интервала между двумя событиями. В качестве часов можно использовать периодическое решение системы уравнений, а образ этого решения при преобразовании Лоренца будет описывать движущиеся часы. Если неподвижные и движущиеся часы — объекты с траекториями  $\tau = 0$  (соответственно  $x' = 0$ ) и периодами колебаний  $\tau$  (соответственно  $\tau'$ ), то выглядит это следующим образом (рис. 6.8).

Следствие (6.4.5)

Движущиеся часы идут в пространстве Минковского в  $\sqrt{1 - v^2}$  раз медленнее (замедление времени).

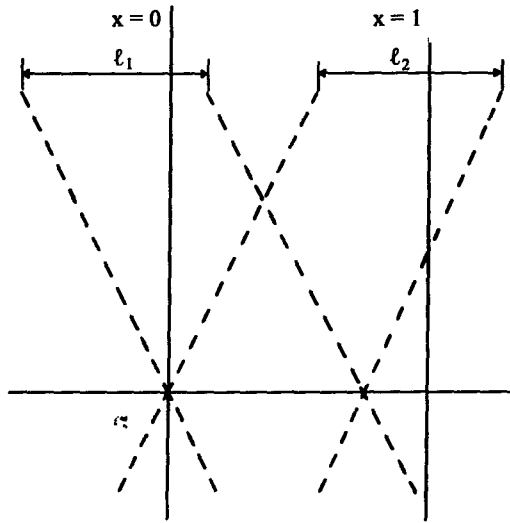


Рис. 6.7. Доказательство лоренцовского сокращения движущихся единичных стержней

**Примечания (6.4.6)**

1. В координатах (6.4.2,3) движущиеся часы также идут медленнее, но при наблюдении из движущейся системы координат покоящиеся часы кажутся идущими быстрее. И в этом случае кажущееся противоречие может быть разрешено.
2. То, что в движущихся телах время течет медленнее, можно доказать непосредственно безотносительно к синхронизации, например, для вращательного движения. Например быстро движущиеся  $\mu$ -мезоны в накопительном кольце живут дольше, чем покоящиеся. В накопительных кольцах наблюдается замедление времени до 100 раз, но удается измерить и весьма незначительное замедление часов при кругосветном полете самолета.
3. Можно спросить, действительно ли данные часы, если им сообщить скорость, замедляют ход в соответствии с уравнениями движения. Выберем в качестве динамической модели часов ларморовское движение и воспользуемся для ускорения электрическим полем, параллельным вектору  $\mathbf{B}$ . В параграфе 4.2 мы уже вычислили, что частота по  $s$  всегда равна  $eB/m$ , а по  $t$  — в  $\sqrt{1-v^2}$  раз меньше. Это связано с релятивистским увеличением массы, вследствие которого быстрая частица становится более тяжелой. Впрочем, скорость  $v$  не слишком изменяется в течение одного периода, поэтому движение по  $t$  продолжает казаться периодическим, и в целом может служить часами. Это полностью соответствует нашему житейскому опыту: при ускорении часов необходимо соблюдать особую осторожность, чтобы они не вышли из строя. Впрочем, квантовая теория делает атомные часы настолько нечувствительными, что при их ускорении не требуется соблюдать никаких мер предосторожности.

В изложенных нами ранее моделях пространства и времени прообраз естественного разбиения временной оси относительно выделенной проекции можно было использовать для того, чтобы разложить все  $M_e$  на прошлое, настоящее и будущее относительно любой точки. Поскольку нам хотелось бы по возможности сохранить это разложение, введенное для случая абсолютной одновременности, то введем следующее определение.

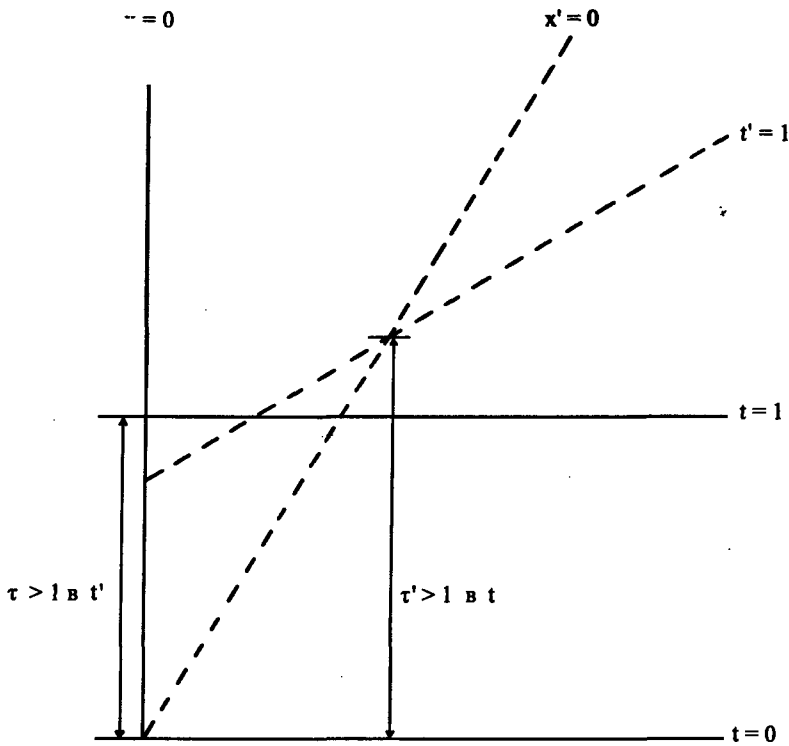


Рис. 6.8. Растяжение времени

#### определение (6.4.7)

Для всех  $a, b \in M_e$ ,  $a \neq b$ , пишем  $a > b$ , если существует решение уравнений движения, проходящее через  $a$  и  $b$ , и  $a$  лежит при более позднем времени. Если  $a > b$  и  $b > a$  не выполняются одновременно ни при каких  $a, b \in M_e$ , то отношение  $>$  индуцирует на  $M_e$  причинную структуру, или  $M_e$  становится причинным пространством.

#### Примечания (6.4.8)

1. На расслоенном пространстве § 6.3 имеем  $(t, \mathbf{x}) > (t', \mathbf{x}') \Leftrightarrow t > t'$ .
2. В уравнения движения могут входить сколь угодно сильные поля, поэтому скорость одного решения может быть мгновенно превращена в скорость другого решения, поэтому  $a > b$  и  $b > c \Rightarrow a > c$ .
3. Существование замкнутых траекторий в этом пространстве уничтожило бы причинную структуру. Курту Геделя удалось построить знаменитое решение уравнений Эйнштейна с замкнутыми времениподобными линиями. Поэтому мы не можем утверждать, что такая возможность противоречит известным нам законам природы. Но в таком пространстве сущность времени изменяется гораздо сильнее, чем в пространстве Минковского. В последнем может быть определено абсолютное время (6.4.2,3), во вселенной Геделя это невозможно.
4.  $\{b \in M_e : a > b\}$  называется прошлым,  $\{b \in M_e : b > a\}$  — будущим точки  $a$ , остальную часть  $M_e$  естественно назвать настоящим. Происходящее в  $a$  влияет только на будущее и испытывает воздействие только прошлого.

Причинные отношения на многообразиях более общего типа могут быть весьма необычными, например, в прошлом может оказаться такая точка, через которую не проходит ни одна траектория, идущая в будущее (см. (6.5.5,2)). Более ясна ситуация имеет место в пространстве Минковского, наделенном структурой причинного пространства.

### Пространство Минковского как причинное пространство (6.4.9)

В пространстве Минковского

$$(t, x, y, z) > (t', x', y', z') \iff t > t' \quad \text{и} \quad (t - t')^2 > (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

### Примечания (6.4.10)

1. Во всех моделях из параграфа 6.3 настоящее — это множество  $\{t', x', y', z' : t' = t\}$ , т.е. представляет собой многообразие меньшей размерности. В пространстве Минковского внутренность этого многообразия имеет структуру четырехмерного многообразия.
2. В отличие от прежнего теперь могут существовать две траектории, такие, что ни одна точка одной траектории не лежит в будущем (или прошлом) любой точки другой траектории. Примером могут служить две гиперболические траектории  $I = \{(\text{sh } s, \text{ch } s, 0, 0) : s \in \mathbb{R}\}$  и  $II = \{(\text{sh } s, -\text{ch } s, 0, 0) : s \in \mathbb{R}\}$ , на которые действует электрическое поле поверхностного заряда  $\mathbf{E} \cong (x_1/|x_1|, 0, 0)$  (рис. 6.9). Наблюдатели на таких траекториях не могут видеть друг друга непосредственно, и только те, кто находятся между ними, могут знать и об одном, и о другом наблюдателе.
3. Причинная структура задает топологию, в которой открытые множества являются объединениями множеств  $U_{ac} := \{b \in M_e : a > b > c\}$ ,  $a, c \in M_e$ . Она совпадает с обычной топологией.
4. Справедлива поразительная **теорема Зеемана**: *каждое биективное отображение  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , сохраняющее причинную структуру (6.4.9), т.е.  $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$ , где  $f$  — биективное отображение, является преобразованием Пуанкаре  $\times$  растяжением.*

## 6.5. $M_e$ как псевдориманово пространство

Наконец, мы подошли к обоснованию действия гравитации на пространство и время. Как видно из (5.6.11), в подходящем образом выбранной системе координат (в “свободно падающей системе отсчета”) разность  $g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}$  и производные от  $g_{\alpha\beta}$  можно обратить в нуль в любой точке. Иначе говоря, в одной точке гравитация не ощутима, и из сказанного в параграфе 6.4 можно заключить, что в подходящих координатах метрика

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2 \quad (6.5.1)$$

воспроизводит реально измеренные длины и расстояния, если при измерении используется только бесконечно малая окрестность точки пространства времени. Разумеется, можно воспользоваться другими координатами, и тогда реальная метрика (6.5.1) трансформируется в рассматриваемой точке из  $\eta_{\alpha\beta}$  в  $g_{\alpha\beta}$ . Таким образом приходим к  $M_e$  с псевдоримановой метрикой.

### $M_e$ как пространство с псевдоримановой метрикой (6.5.2)

В гравитационном поле  $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  задает реально наблюдаемую метрику.

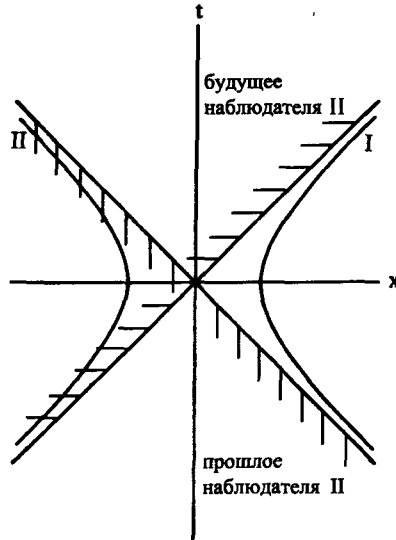


Рис. 6.9. Будущее и прошлое при гиперболическом движении

### Примечания (6.5.3)

1. Для такой интерпретации существенна универсальность гравитации. Если бы различные частицы по-разному двигались в гравитационном поле, то его невозможно было бы исключить в точке с помощью одного и того же преобразования для всех частиц. Универсальность требует также, чтобы в системе координат (6.5.1) уравнения Максвелла имели такой же вид, как в отсутствие гравитации. В этом случае силы, действующие на мерные линейки и часы, не изменяются при включении гравитации, и все функционирует так же, как и в отсутствие гравитации. На математическом языке это означает, что касательное пространство есть пространство Минковского.
2. Геометризация других (негравитационных) полей неизбежно заканчивалась неудачей из-за отсутствия такого рода универсальных свойств. Если по-разному построенные измерительные инструменты различным образом деформируются в поле, то геометрическая интерпретация становится неубедительной.
3. Время от времени кто-нибудь выдвигает "теорию гравитации в плоском пространстве". При этом используются установленные выше уравнения (1.1.6), (1.1.7), но в определенных координатах в качестве метрики интерпретируется не  $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ , а  $\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ . Далее объясняется, что мерные линейки и часы не измеряют эту метрику, поскольку находятся под действием гравитационного потенциала. Но в природе ничто не указывает на такую выделенную систему координат, и реальные мерные линейки и часы измеряют  $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ . Чтобы выйти из затруднительного положения, пытаются искусственно ввести "абсолютное пространство Минковского" подобно тому, как в (6.4.2,3) произвольно вводилась "система абсолютного покоя".
4. Хотя  $g_{\alpha\beta}$  входят в уравнения движения, однако они наблюдаемы ничуть не больше, чем электрические потенциалы. Их влияние можно рассматривать как некоторое общее масштабное преобразование, которое не воспринимается в бесконечно малом.



5. Могла бы представиться ситуация, в которой конформная группа имела бы более фундаментальное значение, чем группа Пуанкаре и наши единицы длины имели бы случайный характер. Риманова структура пространства была бы в этом случае преходящей, обусловленной в значительной мере уровнем наших знаний. Но причинная структура осталась бы.

#### Изменение геометрии (6.5.4)

1. В бесконечно малом общее растяжение может оставаться незаметным, но если  $g_{\alpha\beta}$  зависят от  $x$ , то масштабы в различных точках имеют различную длину, и это можно установить, наложив их один на другой. В случае атомных колебаний, используемых в качестве часов, различие в ходе можно установить, сравнивая частоту испускаемого излучения. Например, метрика Шварцшильда (5.7.1) не зависит от времени, поэтому электрическое поле соответствует решению  $\sim e^{i\omega t}$ . Это означает, что частота по  $t$  пространственно постоянна, но частота по  $s$  различна в различных точках (красное смещение). Современные методы позволяют определить изменение гравитационного потенциала Земли уже при нескольких метрах различия по высоте.
2. Разумеется, переменные  $g_{\alpha\beta}$  нарушают евклидову геометрию пространства в большом. Например, теорема Пифагора не выполняется, если стороны треугольника измеряются по-разному растянутыми масштабами. Однако такого рода эффекты представляют главным образом теоретический интерес с точностью, достижимой с нашими измерительными инструментами, пространство плоско, и на больших расстояниях можем наблюдать только направление, частоту и интенсивность световых лучей.
3. Ранее  $M_e$  всегда было пространством  $\mathbb{R}^4$  с дополнительной структурой, и поэтому  $T(M_e)$  всегда было декартовым произведением, которое мы описывали, говоря, что  $M_e$  “параллелизуемо”. Таким образом, о двух векторах в различных точках можно утверждать, параллельны они или нет, т.е. в пространстве Минковского сравнивать можно только 4-скорости в одной точке. На практике это сравнение можно производить с помощью световых лучей. Два наблюдателя имеют одинаковую скорость, если каждый из них видит другого без доплеровского сдвига. Если определяемое метрикой  $g$  многообразие не параллелизуемо, то такая возможность не представляется, и мы не можем, например, утверждать, покоятся ли два тела друг относительно друга, если только они не находятся в одной точке. Следовательно, световые сигналы более не могут быть использованы для параллелизации, как в пространстве Минковского, поскольку на сигналы теперь действует гравитация.

#### Изменение причинной структуры (6.5.5)

1. Существуют многообразия, не обладающие причинной структурой. Например, если  $M_e = \{x_i \in \mathbb{R}^5 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 - x_4^2 = -r^2\}$  и метрика индуцирована на  $\mathbb{R}^5$  метрикой  $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 - dx_4^2$ , то  $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = r(\cos s, 0, 0, 0, \sin s)$  — замкнутая времениподобная геодезическая линия, которая, как показано в (6.4.8,3), исключает причинную структуру.
2. Если  $M_e$  соответствует пространству Минковского, из которого изъяты определенные части, то в таком  $M_e$  могут существовать две траектории с непересекающимися будущим. Например, в поле Шварцшильда могут быть наблюдатели с траекториями  $I = \{(u, v, \vartheta, \varphi) = (1 + \text{ch } s, \text{sh } s, 0, 0), s \in \mathbb{R}\}$ ,  $II = \{(u, v, \vartheta, \varphi) = (-1 - \text{ch } s, \text{sh } s, 0, 0), s \in \mathbb{R}\}$ . В отличие от (6.4.10,2), ни один из наблюдателей, находящихся между ними, не может видеть ни наблюдателя I, ни наблюдателя II (рис. 6.10).

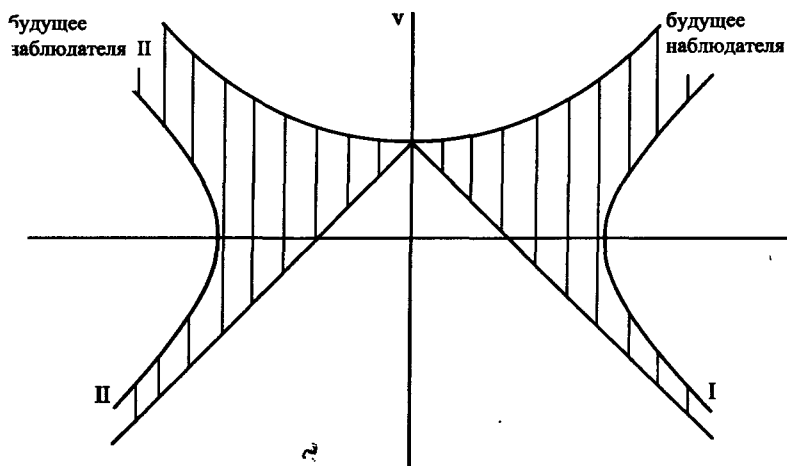


Рис. 6.10. Будущее двух равномерно ускоренных наблюдателей в пространстве Шварцшильда

Так, мы убедились в том, сколь различны законы природы, задаваемые на пространственно-временном многообразии его структурой. Ясно, что делать какие-либо выводы об истинности пространства и времени было бы преждевременно. Мы можем лишь открыть ту ее грань, которая отражает текущее состояние нашего знания законов природы. Что же касается мирового континуума, то он обретает различные формы в зависимости от того, что мы считаем фундаментальным и, что — случайным.

## Литература

### I Цитированная в тексте литература

1. J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, Gauthier-Villars, Band I bis IV (1960, 1968, 1970); Дьедонне Ж. Основы современного анализа / Пер. с англ. И.А. Вайнштейна. — М.: Мир, 1964. — 430 с.
2. E. Hlawka, *Acta Phys. Austr., Suppl.* 7, Springer (1970).
3. R. Abraham, *Foundations of Mechanics*, Benjamin (1967).
4. H. Flanders, *Differential Forms*, Academic Press (1963).
5. S. Sternberg, *Differential Geometry*, Prentice-Hall (1964); Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии / Пер. с англ. Д.В. Алексеевского. Под ред. А.Л. Онищика. — М.: Мир, 1970. — 412 с.
6. C.L. Siegel, J.K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer (1971); Зигель К.Л., Мозер Ю.К. Лекции по небесной механике / Пер. с нем. М.С. Яров-Ярового. Под ред. Г.Н. Дубошина. — М.: Изд. иностр. лит., 1959. — 300 с.
7. V. Szebehely, *Theory of Orbits*, Academic Press (1967).
8. V. Szebehely, *Astronomy and Astrophysics* 22, 171 (1973).
9. V. Arnold, A. Avez, *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*, Gauthier-Villars (1967); Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989. — 472 с.

10. **N. Kerst, R. Serber**, Phys. Rev. 60, 53 (1941).
11. **V. Arnold**, Dok. Ak. Nauk 142, 757 (1962).
12. **A. Schild**, Phys. Rev. 131, 2762 (1963).
13. **Y. Sinai**, Acta Phys. Austr., Suppl. 10, Springer (1973).
14. **J. Moser**, Stable and Random Motions, in: Dynamical Systems, Princeton University Press (1973).
15. **R. McGehee, J. Mather**, in: Lecture Notes in Physics 38, J. Moser Ed., Springer (1975).
16. **G. Contopoulos**, Astrophys. J. 142, 802 (1965).  
**G. Bozis**, The Astronomical Journal 71, 404 (1966).
17. **V. Arnold**, Russian Math. Surv. 18, 5, 9 (1963).
18. **R.C. Robinson**, Generic Properties of Conservative Systems, Amer. J. Math. 92, 562 and 897 (1970).
19. **M. Breiteneker, W. Thirring**, Rivista del Nuovo Cimento 2, No. 4 (1979).
20. **E. Nelson**, Topics in Dynamics, Princeton University Press (1969).
21. **J. Wisdom**, Icarus 56, 51 (1983).
22. **Institut für Wissenschaftlichen Film**, Publikationen zu Wissenschaftlichen Filmen 9, 7 (1986), Göttingen.

### Дополнительная литература к отдельным главам

#### К главе 2

- Th. Bröcker und K. Jänich**, Einführung in die Differentialtopologie, Heidelberger, Taschenbücher 143, Springer (1973).
- Y. Choquet-Bruhat, C. De Witt-Morette, M. Dillard-Bleick**, Analysis, Manifolds and Physics, 2nd edn., North-Holland (1982).
- V. Guillemin und A. Pollack**, Differential Topology, Prentice Hall (1974).
- R. Hermann**, Vector Bundles in Math. Physics Vol. I, Benjamin (1970).
- H. Holman und H. Rummel**, Alternierende Differentialformen, Bibliographisches Institut (1972).
- S. Kobayashi und K. Nomizu**, Foundations of Differential Geometry Vol. I, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics No. 15, Vol. I, Interscience Publishers (1963); *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии / Пер. с англ. Л.В. Сабинаина. — М.: Наука, 1981. — Т. 1. — 344 с.
- L.H. Loomis, S. Sternberg**, Advanced Calculus, Addison-Wesley Company (1968).
- B. Schutz**, Geometrical Methods of Mathematical Physics, Cambridge University Press (1980); *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики / Пер. с англ. Б.А. Дубровина, П.Б. Медведева. Под ред. Б.А. Дубровина. — М.: Мир, 1984. — 303 с.
- M. Spivak**, Calculus on Manifolds, Benjamin (1965).

#### К главе 3

- R. Barrar**, Convergence of the von Zeipel Procedure, Celestial Mechanics 2, 404, 594 (1970).
- N. Bogoliubov und N. Krylov**, Introduction to Non-Linear Mechanics, Princeton University Press (1955).

- N. Bogoliubov et al.**, *Methods of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics*, Springer (1976); *Боголюбов и др. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.* — К.: Наук. думка, 1969. — 247 с.
- J. Ford**, *The Statistical Mechanics of Classical Analytic Dynamics*, in: *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, Vol. III, E. Cohen Ed., North-Holland (1975).
- G. Godbillion**, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris (1969); *Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / Пер. с франц. А.Г. Кушниренко.* — М.: Мир, 1973. — 188 с.
- M. Golubitsky, V. Guillemin**, *Stable Mappings and Their Singularities*, Springer (1973).
- G. Giacaglia**, *Perturbation Methods in Non-Linear Systems*, Springer (1972).
- M. Hirsch, S. Smale**, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press (1974).
- W. Hunziker**, *Scattering in Classical Mechanics*, in: *Scattering in Mathematical Physics*, I. Lavita & J. Marchand Ed., Reidel (1974).
- R. Jost**, *Rev. Mod. Phys.* 36, 572 (1964).
- G. Mackey**, *Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin (1963).
- J. Moser**, *Dynamical Systems, Theory and Applications*, Springer (1975).
- J.M. Souriau**, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod (1970).

*К главам 4 и 5*

**Dynamics of Stellar Systems**, A. Hayli Ed., Reidel (1975).

**L. Landau, E. Lifschitz**, *Klassische Feldtheorie*, Akademie-Verlag (1966);  
*Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.* — М.: Наука, 1973. — 504 с.

**H. Pollard**, *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*, Prentice-Hall (1966).

**S. Sternberg**, *Celestial Mechanics*, Benjamin (1969).

**K. Stumpff**, *Himmelsmechanik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften (1959).

*К главе 6*

**J. Ehlers**, *The Nature and Structure of Spacetime*, in: *The Physicist's Conception of Nature*, J. Mehra Ed., Reidel (1973).

**E. Kronheimer und R. Penrose**, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 63, 481 (1967).

**S. Nanda**, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 49, 533 (1976).

**R. Sexl und H. Urbantke**, *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer (1976).

**A. Trautman**, *Theory of Gravitation*, in: *The Physicist's Conception of Nature*, J. Mehra Ed., Reidel (1973).

**E. Zeeman**, *J. Math. Phys.* 5, 490 (1964).